О формуле обращения для одного подкласса типично-вещественных функций

Л. Е. Дундученко

Пусть регулярная в круге $|z| < 1$ функция $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ типично-вещественна, т. е. вещественна на диаметре $-1 < z < 1$ и обладает свойством $\operatorname{Im} f(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ [1]. Обозначим через M класс вещественных и неубывающих на отрезке $[-1,1]$ функций $\mu(t)$, нормированных условиями

$$\mu(-1) = 0; \qquad \mu(1) - \mu(-1) = 1. \tag{1}$$

В таком случае, как известно [2], каждую типично-вещественную (нормированную) функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \int_{-1}^{1} s(z, t)\, d\mu(t), \tag{2}$$

где

$$s(z, t) = \frac{z}{1 - 2tz + z^2}, \qquad \mu(t) \in M.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением некоторого подкласса T_1 типично-вещественных функций, для которого построим формулу обращения. Дадим следующие определения.

Определение 1. Будем называть функцией класса $\mathfrak{M}_1$ каждую функцию класса M, обладающую свойствами: 1) она может иметь не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода, 2) ее производная (там, где она существует) ограничена и может иметь лишь конечное число точек разрыва 1-го рода.

Определение 2. Будем называть функцией класса T_1 каждую нормированную типично-вещественную функцию $w = f(z)$, определяемую по структурной формуле (2) функцией класса $\mathfrak{M}_1$, т. е. $f(z) = \int\limits_{-1}^{1} s(z, t)\, d\mu(t) \in T_1$, если $\mu(t) \in \mathfrak{M}_1$.

Необходимой для дальнейшего оказывается следующая

Лемма. *Пусть* $f(z) \in T_1$ *и определяется функцией* $\theta(t) \in \mathfrak{M}_1$ *по структурной формуле* (2). *Для того чтобы* $\theta(t)$ *имела точку разрыва* t_0, $-1 \leqslant t_0 \leqslant 1$, *со скачком в ней, равным* λ_0, $0 < \lambda_0 \leqslant 1$, *необходимо и достаточно, чтобы* λ_0 *было угловым значением порядка* α, $0 \leqslant \alpha < 1$, *функции* $f(z)/s(z, t_0)$ *в точке* ζ_0, *где* $\zeta_0 \equiv \zeta_0(t_0) \equiv t_0 + i\sqrt{1 - t_0^2}$, $|\zeta_0| = 1$.

Примечание. Под угловым значением порядка α, $0 \leqslant \alpha < 1$, в точке ζ_0, $|\zeta_0| = 1$, регулярной в круге $|z| < 1$ функции $\psi(z)$ мы понимаем предел $\lim\limits_{z \to \zeta_0} \psi(z)$. Здесь $z \to \zeta_0$ по любому некасательному пути L, не выходящему за пределы угла с вершиной в точке ζ_0, симметрично расположенного относительно радиуса $O\zeta_0$ и величины $\alpha\pi$, где α — фиксированное число.

Доказательство леммы. Необходимость. Предположим сначала, что точка разрыва t_0 функции $\theta(t)$ является внутренней точкой интервала $(-1, 1)$, и потому расстояние от нее до ближайшего конца интервала (для определенности, ближайшим концом будем считать точку $t = 1$) положительно и равно d. Пусть ее скачок в точке t_0 равен λ_0, $0 < \lambda_0 \leqslant 1$. Представим функцию $\theta(t)$ в виде: $\theta(t) \equiv \theta_0(t) + \lambda_0 \cdot \sigma_0(t - t_0)$, где $\sigma_0(t - t_0)$ — ступенчатая функция с единственной точкой роста t_0 и скачком в ней, равным единице, а $\theta_0(t)$ — функция, непрерывная в некоторой окрестности $[t_0 - h;\ t_0 + h]$, где $h > 0$ — произвольное пока, но достаточно малое число, которое подберем позже. В таком случае имеем:

$$\frac{f(z)}{s(z, t_0)} = \lambda_0 + A_1 + A_2 + A_3, \tag{3}$$

где

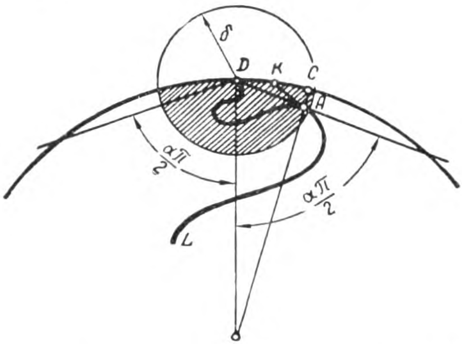
$$A_1 = \int\limits_{-1}^{t_0 - h} \gamma\, d\theta_0(t); \qquad A_2 = \int\limits_{t_0 - h}^{t_0 + h} \gamma\, d\theta_0(t); \qquad A_3 = \int\limits_{t_0 + h}^{1} \gamma\, d\theta_0(t) \tag{4}$$

и

$$\gamma = \frac{(z - \zeta_0) \cdot (z - \zeta_1)}{(z - \zeta') \cdot (z - \zeta'')},$$

$$\begin{aligned} &\zeta_0 = t_0 + i\sqrt{1 - t_0^2}; \qquad \zeta_1 = t_0 - i\sqrt{1 - t_0^2}; \\ &\zeta' = t + i\sqrt{1 - t^2}; \qquad \zeta'' = t - i\sqrt{1 - t^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть ε — достаточно малое число: $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, а $z \to \zeta_0$ вдоль L (рисунок). Выберем и зафиксируем число $h \equiv h(\varepsilon) < \frac{d}{2}$ столь малым, чтобы $\theta_0(t_0 + h) - \theta_0(t_0 - h) < \varepsilon$. Если теперь $t \in [-1, t_0 - h]$, то $|\zeta_0 - \zeta'| \geqslant$ $\geqslant |t_0 - t| \geqslant h$. Зафиксируем еще одно число $\delta > 0$: $\delta = \min\left\{\frac{h^2\varepsilon}{4}\left(1 - \frac{h\varepsilon}{2}\right);\ \frac{d}{4};\ \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right\}$. В таком случае нетрудно видеть, что $|z - \zeta'| > h - \delta > 0$, где $z \in L$, а это приводит к неравенству $|\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$, если только $|z - \zeta_0| < \delta$. Совершенно аналогично получаем такое же неравенство $|\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$ в том случае, когда $t \in [t_0 + h; 1]$. Остается рассмотреть случай $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$. Пусть соответственно z, ζ_0, ζ' и ξ' — аффиксы точек A, D, K и C на рисунке, где $\angle ODA = \frac{\alpha\pi}{2}$. Из (5) следует, что $|\zeta'' - \zeta'| > d$. Обозначая



$$|AD| = |z - \zeta_0| = q; \quad |AC| = |z - \xi'| = p = 1 - \sqrt{1 + q^2 - 2q\cos\frac{\alpha\pi}{2}},$$

получим оценку $\frac{q}{p} < \frac{2 + \cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$, если только $q < \cos\frac{\alpha\pi}{2}$. Опишем теперь окружность радиуса δ с центром в точке ζ_0. Без ограничения общности можно считать, что точки $A(z)$, $C(\xi')$ и $K(\zeta')$ попали внутрь этой окружности. Тогда $d < |\zeta' - \zeta''| \leqslant |z - \zeta'| + |z - \zeta''|$, откуда $|z - \zeta''| > r$, где $r > 0$ и не зависит от ε. Учитывая, что $|z - \zeta_0| < \delta$, получаем оценку $|\gamma| < \frac{4 + 2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{r\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \equiv N$, где N — постоянная, не зависящая от ε. Итак, имеем:

$$|A_1| < \frac{1 - \lambda_0}{2}\varepsilon; \qquad |A_3| < \frac{1 - \lambda_0}{2}\varepsilon; \qquad |A_2| < N \cdot \varepsilon. \tag{6}$$

Отсюда следует, ввиду произвольности ε, $\varepsilon > 0$, формула

$$\lim_{z \to \zeta_0} \{f(z)/s(z, t_0)\} = \lambda_0 \tag{7}$$

в том случае, когда $t_0 \in (-1, 1)$. Случаи $t_0 = -1$ или $t_0 = 1$ исследуются совершенно аналогично.

Достаточность легко доказывается методом от противного с использованием оценок вида (6). Лемма доказана.

Замечания: 1. Формула (7) имеет практическое значение (см. пример в конце заметки).

2. Немного изменив рассуждения для получения оценок (6), можно убедиться, что лемма справедлива и для функций со счетным множеством точек разрыва 1-го рода.

3. Так как в ходе доказательства не была использована ограниченность производной, то лемма распространяется и на функции $\mu(t)$ с неограниченной производной.

4. Пусть $\mu'(t)$ непрерывна на $[-1, 1]$ всюду, кроме конечного числа точек, где может обращаться в бесконечность. Перепишем формулу (2) в таком виде:

$$f(z) \equiv \widetilde{f}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\pi i\mu'(t)\,dt}{w-t}, \quad w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right). \tag{8}$$

Замечаем, что интеграл справа в этой формуле есть интеграл типа Коши, для которого оказываются справедливыми результаты § 22—26 монографии Н. И. Мусхелишвили [3]. Установленные там предложения характеризуют локальное поведение типично-вещественной (в нашем случае) функции и могут рассматриваться как достаточные условия того, чтобы функция (8) обладала алгебраическими или логарифмическими особенностями на границе $|z| = 1$ единичного круга в зависимости от поведения функции $\mu(t) \in \in M$.

Возвращаясь к рассматриваемому классу $\mathfrak{M}_1$, видим, что каждую функцию этого класса можно представить в таком виде:

$$\theta(t) = \sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu\sigma_0(t-t_\nu) + \sum_{\mu=1}^{q}\delta_\mu\sigma_1(t-\tau_\mu) + u(t), \tag{9}$$

где

$$\sigma_0(t-t_\nu) = \begin{cases}0, & -1 \leqslant t < t_\nu,\\ 1, & t_\nu \leqslant t \leqslant 1,\end{cases} \qquad \sigma_1(t-\tau_\mu) = \begin{cases}0 & -1 \leqslant t \leqslant \tau_\mu,\\ t-\tau_\mu, & \tau_\mu \leqslant t \leqslant 1,\end{cases} \tag{10}$$

$$0 \leqslant \lambda_\nu \leqslant 1, \qquad \sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu \leqslant 1; \qquad \delta_\mu = \theta'(\tau_\mu+0) - \theta'(\tau_\mu-0),$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, q,$$

а $u(t)$ — гладкая в $[-1, 1]$ функция (на концах отрезка $[-1, 1]$ имеется в виду односторонняя непрерывность производной $u'(t)$).

Каждой функции $\sigma_1(t-\tau_\mu)$, $-1 \leqslant \tau_\mu < 1$, в формуле (2) соответствует ненормированная функция

$$f_{\sigma_1}(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-2\tau_\mu z+z^2}{1-2z+z^2}. \tag{11}$$

Легко видеть, что и, обратно, если типично-вещественную функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \omega\cdot\ln\frac{1-2\varrho z+z^2}{1-2z+z^2},$$

где $\varphi(z)$ — регулярная в круге $|z| < 1$ функция, не имеющая в точках $z_1 = 1$ и $z_{2,3} = \varrho \pm i\sqrt{1-\varrho^2}$, $-1 \leqslant \varrho < 1$, логарифмических особенностей, то в разложении (9) будет содержаться функция $\sigma_1(t-\varrho)$ с коэффициентом при ней, равным 2ω.

Подставляя (9) в (2), находим

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu s(z, t_\nu) + \frac{1}{2}\ln\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{q}(1-2\tau_\mu z+z^2)^{\delta_\mu}}{(1-z)^{2\delta}} + \int\limits_{-1}^{1}\frac{zu'(t)\,dt}{1-2tz+z^2}, \tag{12}$$

где $\delta = \sum\limits_{\mu=1}^{q}\delta_\mu$, а остальные обозначения те же, что и в (9).

Полагая

$$\Psi(z)=f(z)-\sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu s(z,t_\nu)-\frac{1}{2}\ln\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{q}(1-2\tau_\mu z+z^2)^{\delta_\mu}}{(1-z)^{2\delta}}, \qquad (13)$$

определяем вид гладкой функции $u(t)$ из интегро-дифференциального уравнения

$$\Psi(z)=\int_{-1}^{1}\frac{zu'(t)\,dt}{1-2tz+z^2},$$

решением которого, как известно [4], является функция

$$u(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{t}\sqrt{1-\tau^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}T_n^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau. \qquad (14)$$

Здесь $g(z)=z^{-1}\Psi(z)$,

$$T_n^{\frac{1}{2}}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\tau^2-1)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}[(n+1)\operatorname{arch}\tau], \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (15)$$

— полиномы Чебышева II рода.

Итак, получили следующую теорему обращения в классе T_1.

Теорема 1. *Если $f(z)\in T_1$ — заданная функция, то соответствующая ей функция $\theta(t)$ в классе $\mathfrak{M}_1$ определяется формулой*

$$\theta(t)=\sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu\sigma_0(t-t_\nu)+\sum_{\mu=1}^{q}\delta_\mu\sigma_1(t-\tau_\mu)+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{t}\sqrt{1-\tau^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}T_n^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau, \qquad (16)$$

где все обозначения те же, что и в формулах (9) и (14); λ_ν и δ_μ — некоторые постоянные, определяемые соответственно с помощью формул (7), (10) и (11) и замечаний к ним.

Из формулы (2) и теоремы 1 следует

Теорема 2. *Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы полином $z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ с вещественными коэффициентами был типично-вещественным в круге $|z|<1$, является выбор его коэффициентов из замкнутой области $(n-1)$-мерного пространства переменных $(a_2,a_3,\ldots,a_n)$, определяемой неравенством $\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{k+1}T_k^{\frac{1}{2}}(t)\geqslant 0$, где t — переменный параметр, $-1\leqslant t\leqslant 1$, и заключенной внутри гиперпараллелепипеда: $-(k+1)\leqslant a_{k+1}\leqslant k+1$; $a_1=1$; $k=1,2,\ldots,n-1$.*

2. Существенно используя формулу (7) и теорему 1, можно показать, что функция

$$f_1(z)=\frac{a}{\exp(1-z)^2-1}-\frac{az}{1-z}-\frac{a}{e-1}+\left(1-a-\frac{2a}{(e-1)^2}\right)z \qquad (17)$$

принадлежит классу T_1 при $a\in(0,b]$, где $b=\min\left\{\frac{e-1}{3e-1};\ \frac{1}{c_0}\right\}$, а c_0 определяется так:

$$c_0 = \frac{3e-5}{e-1} + \frac{16}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{32^n \pi^{2n+4} (n^2+2n)}{(4\pi^2-1)^{n+2}\, n!}.$$

Сама функция (17) находится по структурной формуле (2) с помощью следующей функции $\mu_1(t)$ класса $\mathfrak{M}_1$:

$$\mu_1(t) = a\sigma_0(t-1) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{t} \sqrt{1-\tau^2} \left\{ 1 - 3a + \frac{2a}{e-1} + \right.$$

$$\left. + a \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\sum_{j \geqslant \left[\frac{n+3}{4}\right]}^{+\infty} \binom{n+1}{4j-2} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \right] T_n^{\frac{1}{2}}(\tau) \right\} d\tau.$$

Здесь a — параметр, указанный выше, $[x]$ — целая часть x, e — число Эйлера, B_{2j} — числа Бернулли [5] и $\binom{n+1}{4j-2}$ — биномиальные коэффициенты, $T_n^{\frac{1}{2}}(\tau)$ — полиномы Чебышева (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rogosinski, Uber positive garmonische Entwicklungen und typischreele Potenzreihen, Math. Z., **35**, 1932, 93—121.
2. Г. М. Голузин, О типично-вещественных функциях, Матем. сб., т. 27 (69) : 2, 1950, 201—218.
3. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
4. Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, гл. 8, ИЛ, М., 1958.
5. С М Б (под ред. Л. А. Люстерника), Матем. анализ, Физматгиз, М., 1961.

Поступила 21.XI 1964 г.
Киев