Об одном классе попарно не эквивалентных вольтерровых операторов

И. И. Кальмушевский

В статьях [1—4] были даны условия, при которых оператор

$$Kf = \int_0^x k(x, t) f(t)\, dt$$

линейно эквивалентен оператору интегрирования

$$If = \int_0^x f(t)\, dt, \qquad f(t) \in L^2[0, 1].$$

В работе [5] Калиш Г. К. показал, что оператор

$$K_\alpha f = \int_0^x [1 + (x - t)^\alpha] f(t)\, dt, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

не эквивалентен оператору интегрирования. Оценивая более точно, чем в статье [5], $\| K_\alpha^n \|$ мы показываем, что K_α не является линейно эквивалентным K_β, где $\alpha \neq \beta$.

Рассмотрим оператор

$$K_\alpha f = \int_0^x [1 + (x - t)^\alpha] f(t)\, dt, \qquad f(t) \in L^2[0, 1], \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Легко показать, что

$$K_\alpha^n f = \int_0^x \varphi_n(x - t) f(t)\, dt,$$

где $\varphi_n(x - t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k \Gamma^k(\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + n)} (x - t)^{k\alpha + n - 1}$, а $\Gamma(z)$ — функция Эйлера.

Введем следующую функцию

$$\Phi(y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(y + 1)\, \Gamma^k(\alpha + 1)}{k!\, \Gamma(y - k + 1)\, \Gamma(k\alpha + y)} s^{k\alpha + y - 1},$$

где $y \geqslant 0$, $0 < s < 1$. Очевидно, что $\Phi(n, s) = \varphi_n(s)$.

Лемма. *Имеет место соотношение*

$$\Phi(y, s) \sim \frac{s^{y-1} e^{y^{1-\alpha} \Gamma(\alpha+1) s^\alpha}}{\Gamma(y)} \qquad \text{при} \qquad y \to \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Запишем сумму

$$S_1(y, s) = \frac{1}{\sigma(y, s)} \sum_{k=0}^{[y^\beta]} \frac{y(y - 1) \ldots (y - k + 1)}{k!\, \Gamma(k\alpha + y)} \Gamma^k(\alpha + 1) s^{k\alpha + y - 1},$$

где $\sigma(y, s) = \frac{s^{y-1} e^{y^{1-\alpha} \Gamma(\alpha+1) s^\alpha}}{\Gamma(y)}$, а $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Воспользовавшись известным равенством для $\Gamma(y)$ (см., например, [6])

$$\Gamma(y)=\sqrt{2\pi}y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}e^{\frac{\theta}{y}}, \text{ где } |\theta|\leqslant 3,\ y\geqslant 2, \tag{3}$$

получим

$$S_1(y,s)\sim\frac{1}{e^{y^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}}\sum_{k=0}^{[y^{\beta}]}\frac{y(y-1)\ldots(y-k+1)}{k!y^{k\alpha}}\Gamma^k(\alpha+1)s^{k\alpha}$$

при $y\to\infty$. Поэтому

$$\lim_{y\to\infty}S_1(y,s)=\lim_{y\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{y^{\alpha}}\right)^y}{e^{y^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}}=1. \tag{4}$$

Оценим сумму

$$S_2(y,s)=\frac{1}{\sigma(y,s)}\sum_{k=[y^{\beta}]+1}^{[y]}\frac{\Gamma(y+1)\Gamma^k(\alpha+1)}{k!\Gamma(y-k+1)\Gamma(k\alpha+y)}s^{k\alpha+y-1}.$$

Так как слагаемые суммы с возрастанием k убывают, то

$$S_2(y,s)\leqslant\frac{y\Gamma(y+1)\Gamma^{y^{\beta}}(\alpha+1)s^{\alpha y^{\beta}+y-1}}{\sigma(y,s)\Gamma(y^{\beta}+1)\Gamma(y-y^{\beta}+1)\Gamma(\alpha y^{\beta}+y)}.$$

Из равенства (3) вытекает, что

$$S_2(y,s)=o(1)\qquad\text{при } y\to\infty. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую сумму

$$S_3(y,s)=\frac{1}{\sigma(y,s)}\sum_{k=[y]+1}^{\infty}\frac{y(y-1)\ldots(y-k+1)}{k!\,\Gamma(k\alpha+y)}\Gamma^k(\alpha+1)s^{k\alpha+y-1}.$$

Ряд, представляющий сумму $S_3(y,s)$, является знакопеременным, а члены ряда убывают по абсолютной величине с возрастанием k. Поэтому

$$S_3(y,s)<\frac{y^{y+1}\Gamma^y(\alpha+1)}{\sigma(y,s)\Gamma(y+1)\Gamma(k\alpha+y)}s^{k\alpha+y-1},$$

и, применяя (3), получаем, что

$$S_3(y,s)=o(1)\qquad\text{при}\quad y\to\infty. \tag{6}$$

Из соотношений (4) — (6) следует утверждение леммы.

Имеет место

Теорема. *Если* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ *и* $\alpha\neq\beta$, *то операторы* K_{α} *и* K_{β} *не являются линейно эквивалентными.*

Доказательство. Из асимптотического равенства (2) при $y=n$ и $s=x-t$ получаем, что для всех $n\geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$\varphi_n(x-t)\leqslant\frac{C^*(x-t)^{n-1}e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)(x-t)^{\alpha}}}{\Gamma(n)}.$$

---

* В дальнейшем C — положительная постоянная, не всегда одна и та же.

С помощью данного неравенства легко вывести оценку для нормы оператора K_α^n:

$$\| K_\alpha^n \| \leqslant C e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)} \| I^n \|,$$

где $If = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ и $n \geqslant n_0$. Норма оператора I^n удовлетворяет условию [5]

$$\| I^n \| \leqslant \frac{1}{n!\sqrt{2}}.$$

Таким образом, имеет место следующее неравенство

$$\| K_\alpha^n \| \leqslant \frac{C e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)}}{n!\sqrt{2}}, \qquad n \geqslant n_0. \tag{7}$$

Оценим $\| K_\alpha^n \|$ снизу. Взяв $f_0(t) \equiv 1$ и воспользовавшись (2), получим

$$K_\alpha^n f_0 = \int\limits_0^x \varphi_n(x-t)\,dt = x \int\limits_0^1 \varphi_n[x(1-s)]\,ds \geqslant$$

$$\geqslant x \int\limits_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{C[x(1-s)]^{n-1} e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)[x(1-s)]^\alpha}}{\Gamma(n)}\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C x^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)x^\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha}}{\Gamma(n+1)}.$$

Из последнего неравенства вытекает:

$$\| K_\alpha^n f_0 \| \geqslant \frac{C}{\Gamma(n+1)} \left\{ \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} x^{2n} e^{2n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)x^\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)C}}{n\Gamma(n+1)}.$$

Полученные неравенства дают следующую оценку для $\| K_\alpha^n \|$:

$$\| K_\alpha^n \| \geqslant \| K_\alpha^n f_0 \| \geqslant \frac{e^{n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)C}}{n\Gamma(n+1)} \tag{8}$$

при всех $n \geqslant n_1$.

Рассмотрим операторы K_α и K_β при $\alpha \neq \beta$. Пусть $\alpha < \beta$. Соотношения (7), (8) показывают, что $\frac{\| K_\alpha^n \|}{\| K_\beta^n \|}$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$, откуда и следует справедливость теоремы.

Пользуясь формулами (7), (8), получаем

Следствие. *Если ядра операторов*

$$K_1 f = \int\limits_0^x [1 + k_1(x,t)] f(t)\,dt,$$

$$K_2 = \int\limits_0^x [1 + k_2(x,t)] f(t)\,dt, f(t) \in L^2[0,1],$$

удовлетворяют неравенствам

$$(x-t)^{\alpha_1} \leqslant k_1(x,t) \leqslant (x-t)^{\alpha_2},$$

$$(x-t)^{\beta_1} \leqslant k_2(x,t) \leqslant (x-t)^{\beta_2},$$

где α_i, β_i *из* $(0,1)$ *и промежутки* $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$ *не пересекаются, то операторы* K_1 и K_2 *не являются линейно эквивалентными.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Сахнович, О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задач, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, 1957, 235—262.
2. Л. А. Сахнович, Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)k(x-t)dt$, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, 1958, 299—308.
3. И. И. Кальмушевский, О линейной эквивалентности вольтерровых операторов, УМН, т. XX, вып. 6, 1965.
4. G. K. Kalish, On similarity, reducing manifolds, and unitary equivalence of certain Volterra operators, Ann. Math., **66**, N 3, 1957, 481—494.
5. G. K. Kalish, On similarity invariants of certain operators in L_p, Pacif. J. Math., **11**, № 1, 1961, 247—252.
6. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, М., 1959.

Поступила 12.XI 1965 г.

Одесса