Определение температурных напряжений бесконечной пластинки при заданной температуре на одной из кромок

Н. Н. Каркузашвили, И. Г. Козубовская

Предположим, что имеется бесконечная тонкая пластинка, температура которой T изменяется определенным образом во времени; на одной из кромок — напайка, другая кромка теплоизолирована; ширина пластинки b; источники тепла и теплообмен в пластинке отсутствуют и задана начальная температура во всех точках пластинки. Тогда распределение температуры $T(x, y, t)$ будет описываться уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

при начальных и граничных условиях

$$T(x, y, t)\big|_{t=0} = 0;$$

$$T(x, y, t)\big|_{y=0} = f(x, t),$$

$$\left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=-b} = 0.$$

Применяя преобразования Лапласа по t и Фурье по x [1, 2], получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \overline{T}(\alpha, y, \omega)}{dy^2} - \left(\alpha^2 + \frac{\omega}{\varkappa}\right) \overline{T} = 0. \qquad (*)$$

Его решением является функция

$$\bar{T}(\alpha, y, \omega) = A(\nu)e^{-\nu y} + B(\nu)e^{\nu y}. \qquad (**)$$

Запишем функцию $f(x, t)$ в преобразованном виде:

$$\bar{f}(\alpha, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f(x, t)\, e^{i\alpha x} e^{\omega t}\, dx dt.$$

Обратное преобразование Фурье — Лапласа для данной функции имеет вид

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\alpha, \omega)\, e^{-i\alpha x} e^{-\omega t}\, d\alpha d\omega.$$

Подставив в выражение (**) преобразованные граничные условия, получим решение дифференциального уравнения (*) в виде

$$\bar{T}(\alpha, y, \omega) = \frac{\bar{f}(\alpha, \omega)\,(e^{2\nu y} + e^{-2\nu b})\, e^{-\nu y}}{1 + e^{-2\nu b}},$$

где $\nu^2 = \alpha^2 + \dfrac{\omega}{\varkappa}$.

Переходя к обратным преобразованиям и применяя теорему обращения, получаем:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\bar{f}(\alpha, \omega)\,[e^{2\nu y} + e^{-2\nu b}]\, e^{-\nu y} e^{i\alpha(x-\xi)} e^{\omega t}}{1 + e^{-2\nu b}}\, d\xi d\alpha d\omega. \qquad (1)$$

Определим температурные напряжения при заданном температурном поле (1).

Известно, что уравнения движения при отсутствии объемных сил [3] записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} &= \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Между компонентами напряжений и деформаций при наличии температурных членов [4] существует следующая связь:

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa\beta T, \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \varkappa\beta T, \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$, λ и μ — коэффициенты Пуассона.

Введем в рассмотрение функции $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$, связанные с компонентами перемещений:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y},$$
$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Так как компоненты перемещений u и v имеют непрерывные частные производные вплоть до третьего порядка, то функции φ и ψ должны иметь непрерывные частные производные вплоть до четвертого порядка, причем их производные, начиная со второго порядка, однозначны во всей рассматриваемой области.

Учитывая (4), выражение (3) можно представить в виде

$$X_x = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) - \varkappa\beta T,$$
$$Y_y = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) - \varkappa\beta T, \tag{5}$$
$$X_y = \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

Рассмотрим случай, когда пластинка свободна от воздействия внешних усилий, т. е.

$$Y_y\big|_{y=0} = 0, \quad X_x = 0,$$
$$Y_y\big|_{y=-b} = 0, \quad X_y = 0. \tag{6}$$

Задача заключается в интегрировании уравнений (2) при граничных условиях (6).

Применяя к уравнениям (2) и (3) преобразования Лапласа и Фурье по t и по x, учитывая выражение (5), получим:

$$-i\alpha\overline{X}_x + \overline{X}_y' = -i\alpha\varrho\omega^2\overline{\varphi} - \varrho\omega^2\overline{\psi}',$$
$$-i\alpha\overline{X}_y + \overline{Y}_y' = \varrho^2\omega^2\overline{\varphi}' - i\alpha\varrho\omega^2\overline{\psi}; \tag{2'}$$

$$\overline{X}_x = -\alpha^2(\alpha + 2\mu)\overline{\varphi} - i\alpha(\lambda + 2\mu)\overline{\psi}' + \lambda\overline{\varphi}'' + i\lambda\alpha\overline{\psi}' -$$
$$- \frac{\varkappa\beta\overline{f}(\alpha, \omega)(e^{2\nu y} + e^{-2\nu b})e^{-\nu y}}{1 + e^{-2\nu b}},$$

$$\overline{Y}_y = (\lambda + 2\mu)\overline{\varphi}'' + i\alpha(\lambda + 2\mu)\overline{\psi}' - \lambda\alpha^2\overline{\varphi} - \lambda i\alpha\overline{\psi}' -$$
$$- \frac{\varkappa\beta\overline{f}(\alpha, \omega)(e^{2\nu y} + e^{-2\nu b})e^{-\nu y}}{1 + e^{-2\nu b}}, \tag{3'}$$

$$\overline{X}_y = -2i\alpha\mu\overline{\varphi}' + \mu\alpha^2\overline{\psi} + \mu\overline{\psi}''$$

(штрих означает дифференцирование по y).

Подставляя (3′) в (2′), путем несложных преобразований получим обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\overline{\psi}^{(IV)} - \left(\frac{2\mu\alpha^2 - \varrho\omega^2}{\mu}\right)\overline{\psi}'' + \frac{\alpha^2(\alpha^2\mu - \varrho\omega^2)}{\mu}\overline{\psi} = 0, \tag{7'}$$

$$\overline{\varphi}^{(IV)} - \left(2\alpha^2 + \frac{\varrho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right)\overline{\varphi}'' + \alpha^2\left(\alpha^2 + \frac{\varrho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right)\overline{\varphi} =$$

$$= \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,e^{2\nu y} + e^{-2\nu b})\,e^{-\nu y}}{(\lambda + 2\mu)\,(1 + e^{-2\nu b})}. \qquad (7'')$$

Решением уравнения (7′) является выражение

$$\overline{\psi} = A_1e^{-\alpha y} + A_2e^{\alpha y} + A_3e^{-ly} + A_4e^{ly}, \qquad (8')$$

где $l = \sqrt{\dfrac{\alpha^2\mu - \varrho\omega^2}{\mu}}$.

Решение соответствующего однородного уравнения (7″) имеет вид

$$\overline{\varphi} = \overline{B}_1e^{-\alpha y} + \overline{B}_2e^{\alpha y} + B_3e^{-Ly} + \overline{B}_4e^{Ly} \qquad (8'')$$

здесь $L = \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{\varrho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}$.

Общее решение уравнения (7″) ищем методом вариации постоянных. В конечном результате получим:

$$B_1(y) = \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,(e^{(\nu+\alpha)b} - 1)}{2\alpha\,(\nu + \alpha)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} -$$

$$- \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu-\alpha)b} - 1]}{2\alpha\,(\nu - \alpha)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} + \overline{B}_1,$$

$$B_2(y) = -\frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,(e^{(\nu+\alpha)b} - 1)}{2\alpha\,(\nu - \alpha)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} +$$

$$+ \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu+\alpha)b} - 1]}{2\alpha\,(\nu + \alpha)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} + \overline{B}_2, \qquad (9)$$

$$B_3(y) = -\frac{\beta(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,[e^{(\nu+L)b} - 1]}{2L\,(\nu + L)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} +$$

$$+ \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu-L)b} - 1]}{2L\,(\nu + L)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} + B_3,$$

$$B_4(y) = \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,[e^{(\nu-L)b} - 1]}{2L\,(\nu - L)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} -$$

$$- \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)\,e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu+L)b} - 1]}{2L\,(\nu + L)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})} + B_4.$$

Учитывая (9) и (8″), запишем общее решение уравнения (7″):

$$\overline{\varphi} = B_1e^{-\alpha y} + B_2e^{\alpha y} + B_3e^{-Ly} + B_4e^{Ly} + K_1\,\{[e^{(\nu+\alpha)b} - 1]\,e^{-\alpha y} + e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu+\alpha)b} - 1]e^{\alpha y}\} - K_2\,\{[e^{(\nu-\alpha)b} - 1]\,e^{\alpha y} + e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu-\alpha)b} - 1]\,e^{-\alpha y}\} + K_3\,\{[e^{(\nu-L)b} - 1]e^{Ly} + e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu-L)b} - 1]e^{-Ly}\} - K_4\,\{[e^{(\nu+L)b} - 1]e^{-Ly} + e^{-2\nu b}\,[e^{-(\nu+L)b} - 1]e^{Ly}\}, \qquad (10)$$

где

$$K_1 = \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)}{2\alpha\,(\nu + \alpha)\,\varrho\omega^2\,(1 + e^{-2\nu b})}, \quad K_2 = \frac{\beta\,(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\overline{f}\,(\alpha, \omega)}{2\alpha\,(\nu - \alpha)\,\beta\omega^2(1 + e^{-2\nu b})},$$

$$K_3 = \frac{\beta(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\bar{f}(\alpha, \omega)}{2L(\nu - L)\varrho\omega^2(1 + e^{-2\nu b})}, \quad K_4 = \frac{\beta(\alpha^2\varkappa - \omega - \varkappa)\,\bar{f}(\alpha, \omega)}{2\alpha(\nu - \alpha)\varrho\omega^2(1 + e^{-2\nu b})}.$$

Продифференцировав выражение (8′) и (10) по y, учитывая граничные условия (6), получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_i и B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{gathered}
\alpha B_1 - \alpha B_2 + LB_3 - LB_4 + F(\alpha, 0) = 0, \\
\alpha B_1 e^{\alpha b} - \alpha B_2 e^{-\alpha b} - LB_3 e^{-Lb} - LB_4 e^{-Lb} + F(\alpha, b) = 0, \\
-2\mu\alpha^2 B_1 - 2\mu\alpha^2 B_2 + [\lambda L^2 - \alpha^2(\lambda + 2\mu)]\,B_3 + [\lambda L^2 - \alpha^2(\lambda + 2\mu)]\,B_4 + \\
+ E(\alpha, 0) = 0, \\
-2\mu\alpha^2 B_1 e^{\alpha b} - 2\mu\alpha^2 B_2 e^{-\alpha b} + [\lambda L^2 - \alpha^2(\lambda + 2\mu)]\,B_3 e^{\alpha b} + [\lambda L^2 - \\
- \alpha^2(\lambda + 2\mu)]\,B_4 e^{-\alpha b} + E(\alpha, 0) = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

где $F(\alpha, 0)$, $F(\alpha, b)$, $E(\alpha, 0)$ и $E(\alpha, b)$ — известные функции.

Аналогичным образом составляем систему для определения коэффициентов A_i:

$$\begin{gathered}
2\alpha^2(A_1 + A_2) + (\alpha^2 + l^2)(A_3 - A_4) = 0, \\
\alpha(A_1 + A_2) + l(A_3 - A_4) = 0, \\
2\alpha^2(A_1 e^{\alpha b} + A_2 e^{-\alpha b}) + (\alpha^2 + l^2)(A_3 e^{-lb} - A_4 e^{lb}) = 0, \\
\alpha(A_1 e^{\alpha b} + A_2 e^{-\alpha b}) + l(A_3 e^{-lb} - A_4 e^{lb}) = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Система (12) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $\psi \equiv 0$.

Определяя из системы (11) коэффициенты B_i и подставляя их значения в (10), находим функцию $\bar{\varphi}(\alpha, y, \omega)$ (преобразование Фурье):

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi e^{i\alpha x + \omega t}\, dx dt. \tag{13}$$

Перейдем в выражении (13) к обратным преобразованиям Фурье и Лапласа:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \bar{\varphi} e^{i(\alpha x - i\omega t)}\, d\alpha d\omega.$$

Определив φ и учитывая то, что $\psi \equiv 0$, для компонент напряжения получим следующие выражения:

$$X_x = \lambda\Delta\varphi + 2\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \varkappa\beta T,$$

$$Y_y = \lambda\Delta\varphi + 2\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \varkappa\beta T,$$

$$X_y = 2\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y},$$

где T определяется формулой (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, Изд-во «Наука», М., 1964.
2. Б. Нобл, Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962.
3. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, М., 1954.
4. Н. Н. Лебедев, Температурные напряжения в теории упругости, ОНТИ, М.—Л., 1937.

Поступила 14.IV 1965 г.
Киев