Об одном условии сходимости интерполяционных полиномов

П. Я. Киселев

1. Рассмотрим пространство C_z^n комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что на ограниченном множестве $E \subset C_z^n$ определена функция $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ и заданы точки

$$z^{(i)} = (z_1^{(i_1)}, z_2^{(i_2)}, \ldots, z_n^{(i_n)}), \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered} i_1 = 1, 2, \ldots, m_1 + 1, \\ i_2 = 1, 2, \ldots, m_2 + 1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ i_n = 1, 2, \ldots, m_n + 1; \end{gathered}$$

и что точки $z_k^{(i_k)}$ отличны друг от друга. Пусть требуется построить полином

$$P_{m_1 \ldots m_n}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{l_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{l_n=0}^{m_n} a_{l_1, \ldots, l_n} z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n} \tag{2}$$

соответственно степени m_j по переменному z_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, который в заданных точках (1) совпадал бы с функцией $f(z)$, т. е.

$$P_{m_1 \ldots m_n}(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)}) = f(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)}). \tag{3}$$

Покажем, что полином вида (2) существует и является единственным. В самом деле, построим вначале полином

$$P_{m_1}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} a_{k_1}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{k_1} \tag{4}$$

степени m_1 по переменному z_1 с коэффициентами, зависящими от $z_2, \ldots, z_n$, который удовлетворяет условиям

$$P_{m_1}(z_1^{(i_1)}, z_2, \ldots, z_n) = f(z_1^{(i_1)}, z_2, \ldots, z_n). \tag{5}$$

Искомый полином имеет вид

$$P_{m_1}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1+1} f(z_1^{(i_1)}, z_2, \ldots, z_n) \frac{\omega_{m_1}(z_1)}{(z_1 - z_1^{(i_1)})\, \omega_{m_1}'(z_1^{(i_1)})}, \tag{6}$$

где $\omega_{m_1}(z_1) = \prod_{i_1=1}^{m_1+1} (z_1 - z_1^{(i_1)})$. Формула (6) получается путем исключения неизвестных $a_{k_1}(z_2, \ldots, z_n)$ из уравнений (4) и (5) точно так же, как при установлении интерполяционной формулы Лагранжа [1, 2] в случае C_z^1. В силу выбора узлов (1) определитель системы (5) отличен от нуля, а поэтому полином (6) является единственным.

Интерполируя теперь полином $P_{m_1}(z_1, \ldots, z_n)$ по переменному z_2 в узлах $z_2^{(i_2)}$, получим, как и выше,

$$P_{m_1 m_2}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_2=1}^{m_2+1} P_{m_1}(z_1, z_2^{(i_2)}, \ldots, z_n) \quad \frac{\omega_{m_2}(z_2)}{(z_2 - z_2^{(i_2)})\, \omega'_{m_2}(z_2)},$$

где

$$\omega_{m_2}(z_2) = \prod_{i_2=1}^{m_2+1} (z_2 - z_2^{(i_2)}),$$

или, учитывая (6),

$$P_{m_1 m_2}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1+1} \sum_{i_2=1}^{m_2+1} f(z_1^{(i_1)}, z_2^{(i_2)}, z_3, \ldots, z_n) \times$$

$$\times \frac{\omega_{m_1}(z_1)}{(z_1 - z_1^{(i_1)}) \cdot \omega'_{m_1}(z_1)} \cdot \frac{\omega_{m_2}(z_2)}{(z_2 - z_2^{(i_2)}) \cdot \omega'_{m_2}(z_2^{(i_2)})}.$$

Повторяя этот процесс n раз, получим

$$P_{m_1 \ldots m_n}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1+1} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n+1} f(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)}) \times$$

$$\times \frac{\omega_{m_1}(z_1)}{(z_1 - z_1^{(i_1)})\, \omega'_{m_1}(z_1^{(i_1)})} \ldots \frac{\omega_{m_n}(z_n)}{(z_n - z_n^{(i_n)})\, \omega'_{m_n}(z_n^{(i_n)})}, \tag{7}$$

где

$$\omega_{m_j}(z_j) = \prod_{i_j=1}^{m_j+1} (z_j - z_j^{(i_j)}).$$

В силу выбора узлов (1) полином (7) является единственным.

Непосредственной проверкой можно также убедиться в том, что полином (7) удовлетворяет условиям (3).

2. Рассмотрим в пространстве C_z^n единичный полицилиндр $D = \{|z_k| < 1,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D}$. Как известно [4, 5], функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}. \tag{8}$$

Выберем в качестве узлов интерполяции функции $f(z)$ точки

$$z_j^{(i_j)} = e^{\frac{2 i_j \pi}{m_j+1} i}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{9}$$

тогда $\omega_{m_j}(z_j) = z_j^{m_j+1} - 1$ и, следовательно, полином, интерполирующий функцию $f(z)$ в узлах (9), будет иметь вид

$$P_{m_1\ldots m_n}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(m_1+1)\ldots(m_n+1)} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{m_1+1} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n+1} f(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)}) \frac{z_1^{(i_1)}(z_1^{m_1+1}-1)}{z_1 - z_1^{(i_1)}} \ldots \frac{z_n^{(i_n)}(z_n^{m_n+1}-1)}{z_n - z_n^{(i_n)}}. \quad (10)$$

Важным вопросом в теории интерполяции является вопрос о выявлении тех условий, при которых интерполяционные полиномы равномерно сходятся к интерполируемой функции. В работе [3] получены условия, налагаемые на узлы интерполяции, при которых интерполяционные полиномы сходятся равномерно в $\overline{D}$ к функции, аналитической в $\overline{D}$. Представляет интерес получить условия равномерной сходимости интерполяционных полиномов в $\overline{D}$ к функции $f(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$. В настоящей работе получено одно из таких условий.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ является аналитической в единичном полицилиндре $D = \{|z_k| < 1,\ k = 1,\ldots,\ n\}$, непрерывной в $\overline{D}$ и выполняется условие*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} |c_{k_1,\ldots,k_n}| < \infty, \quad (11)$$

где $c_{k_1,\ldots,k_n}$ — коэффициенты разложения функции $f(z)$ в ряд (8), *то последовательность интерполяционных полиномов* (10) *равномерно сходится к функции $f(z)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство. Предварительно преобразуем ряд (8) следующим образом:

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = \sum_{k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} \times$$

$$\times [(c_{0,k_2,\ldots,k_n} + c_{1,k_2,\ldots,k_n} z_1 + \ldots + c_{m_1,k_2,\ldots,k_n} z_1^{m_1}) +$$

$$+ z_1^{m_1+1}(c_{m_1+1,k_2,\ldots,k_n} + c_{m_1+2,k_2,\ldots,k_n} z_1 + \ldots + c_{2m_1+1,k_2,\ldots,k_n} z_1^{m_1}) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ z_1^{\mu_1(m_1+1)}(c_{\mu_1(m_1+1),k_2,\ldots,k_n} + c_{\mu_1(m_1+1)+1,k_2,\ldots,k_n} z_1 +$$

$$+ \ldots + c_{\mu_1(m_1+1)+m_1,k_2,\ldots,k_n} z_1^{m_1}) + \ldots] =$$

$$= \sum_{k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} z_1^{\mu_1(m_1+1)} \sum_{k_1=0}^{m_1} c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,k_2,\ldots,k_n} z_1^{k_1} =$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{\infty} z_1^{\mu_1(m_1+1)} \sum_{k_1=0}^{m_1} z_1^{k_1} \sum_{k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,k_2,\ldots,k_n} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}.$$

Применяя аналогичные преобразования к переменным $z_2, \ldots, z_n$, получим

$$f(z) = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=0}^{\infty} z_1^{\mu_1(m_1+1)} \ldots z_n^{\mu_n(m_n+1)} \left[\sum_{k_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n} c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} \right]. \quad (12)$$

В силу выбора точек (9) справедливо равенство $[z_j^{(i_j)}]^{\mu_j(m_j+1)} = 1$; поэтому

$$f(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)}) = \sum_{\substack{\mu_1=0\\ \vdots \\ \mu_n=0}}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n} \times$$

$$\times (z_1^{(i_1)})^{k_1} \ldots (z_n^{(i_n)})^{k_n} = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} (z_1^{(i_1)})^{k_1} \ldots \times$$

$$\times (z_n^{(i_n)})^{k_n} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=0}^{\infty} c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n}, \tag{13}$$

или

$$f(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)}) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} B_{k_1,\ldots,k_n} (z_1^{(i_1)})^{k_1} \ldots (z_n^{(i_n)})^{k_n}, \tag{14}$$

где

$$B_{k_1,\ldots,k_n} = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=0}^{\infty} c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n}. \tag{15}$$

Подставляя теперь (14) в (10), получим

$$P_{m_1\ldots m_n}(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$= \frac{1}{(m_1+1)\ldots(m_n+1)} \sum_{i_1=1}^{m_1+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n+1} \left[\sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} B_{k_1,\ldots,k_n} (z_1^{(i_1)})^{k_1} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots (z_n^{(i_n)})^{k_n} \right] \frac{z_1^{(i_1)} (z_1^{m_1+1} - 1)}{z_1 - z_1^{(i_1)}} \cdots \frac{z_n^{(i_n)} (z_n^{m_n+1} - 1)}{z_n - z_n^{(i_n)}} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} B_{k_1,\ldots,k_n} \left[\frac{1}{m_1+1} \sum_{i_1=1}^{m_1+1} (z_1^{(i_1)})^{k_1+1} \frac{z_1^{m_1+1} - 1}{z_1 - z_1^{(i_1)}} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \frac{1}{m_n+1} \sum_{i_n=1}^{m_n+1} (z_n^{(i_n)})^{k_n+1} \frac{z_n^{m_n+1} - 1}{z_n - z_n^{(i_n)}} \right].$$

Далее, для узлов (9) при $l \neq k(m_j+1)$, где k — целое число, справедливо равенство

$$\sum_{i_j=1}^{m_j+1} [z_j^{(i_j)}]^l = 0.$$

Учитывая это равенство, имеем

$$\frac{1}{m_j+1} \sum_{i_j=1}^{m_j+1} [z_j^{(i_j)}]^{k_j+1} \frac{z_j^{m_j+1} - 1}{z_j - z_j^{(i_j)}} =$$

$$= \frac{1}{m_i+1}\sum_{i_j=1}^{m_j+1}\{z_j^{m_j}[z_j^{(i_j)}]^{k_j+1}+z_j^{m_j-1}[z_j^{(i_j)}]^{k_j+2}+$$

$$+\ldots+z_j^{k_j}+\ldots+[z_j^{(i_j)}]^{k_j}\} = z_j^{k_j}.$$

Поэтому

$$P_{m_1\ldots m_n}(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{k_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m_n}B_{k_1,\ldots,k_n}z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}. \tag{16}$$

Вычитая из (12) равенство (16) и учитывая (15), получим

$$f(z_1,\ldots,z_n)-P_{m_1\ldots m_n}(z_1,\ldots,z_n)=$$

$$=\sum_{\mu_1,\ldots\mu_n=0}^{\infty}[z_1^{\mu_1(m_1+1)}\ldots z_n^{\mu_n(m_n+1)}-1]\sum_{k_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m_n}c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n}z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}=$$

$$=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=1}^{\infty}[z_1^{\mu_1(m_1+1)}\ldots z_n^{\mu_n(m_n+1)}-1]\sum_{k_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m_n}c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n}z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}.$$

Отсюда

$$|f(z)-P_{m_1\ldots m_n}(z)|\leqslant 2\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=1}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m_n}|c_{\mu_1(m_1+1)+k_1,\ldots,\mu_n(m_n+1)+k_n}|=$$

$$=\sum_{\substack{k_1=m_1+1\\ \cdots\cdots\\ k_n=m_n+1}}^{\infty}|c_{k_1,\ldots,k_n}|=\sigma_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Так как ряд (8) абсолютно сходится, то $\sigma_{m_1,\ldots,m_n}\to 0$ при $m_1,\ldots,m_n\to\to\infty$ и, следовательно, $|f(z)-P_{m_1\ldots m_n}(z)|\to 0$ равномерно.

Теорема доказана.

Таким образом, если ряд (8) абсолютно сходится на остове ∂D области D, то последовательность интерполяционных полиномов $\{P_{m_1\ldots m_n}(z)\}$ в узлах (9) равномерно сходится к функции $f(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, М., 1954.
2. Дж. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.
3. В. К. Дзядык и Р. Н. Ковальчук, Об интерполировании функций многих комплексных переменных, Сб. «Вопросы математической физики и теории функций», II, изд-во «Наукова думка», К., 1964.
4. С. Бохнер, У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951.
5. Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.

Поступила 16.X 1965 г.
Киев