К вопросам общей теории выпуклых функций

А. И. Перов

Основным результатом настоящей заметки является доказательство того факта, что выпуклая функция в обобщенном смысле всегда непрерывно дифференцируема.

1. Пусть $\mathscr{E}$ — выпуклое множество конечномерного вещественного пространства E. Функция $y(x)$, заданная на множестве $\mathscr{E}$, называется *выпуклой*, если справедливо неравенство

$$y((1-t)x_0 + tx_1) \leqslant (1-t)y(x_0) + ty(x_1) \quad (0 < t < 1,\ x_0 \neq x_1).$$

Если здесь всегда стоит знак строгого неравенства, то функция $y(x)$ называется *строго выпуклой*.

Пусть функция $\varphi(h)$, заданная на всем пространстве E, положительно однородна и выпукла:

$$\varphi(th) = t\varphi(h) \quad (t \geqslant 0),$$

$$\varphi((1-t)h + tk) \leqslant (1-t)\varphi(h) + t\varphi(k) \quad (0 < t < 1;\ h, k \in E).$$

Обозначим через $\Phi = \mathfrak{M}(\varphi)$ множество всех линейных функционалов $l \in E^*$ (E^* — пространство, сопряженное E), обладающих тем свойством, что

$$\varphi(h) \geqslant (h, l) \quad (h \in E).$$

Это множество непусто, ограничено, выпукло и замкнуто. Исходная функция φ восстанавливается по множеству Φ следующим образом:

$$\varphi(h) = \max_{l \in \Phi}(h, l)$$

(перечисленные выше факты можно найти в [1]).

Пусть $y(x)$ выпукла на открытом множестве $\mathscr{E}$ (выпуклом) пространства E. Тогда при любом $h \in E$ существует предел:

$$\lim_{t \to +0} \frac{y(x+th) - y(x)}{t} = Dy(x, h),$$

который назовем (односторонним) *дифференциалом Гато* функции $y(x)$, соответствующим приращению h.

Дифференциал Гато является положительно однородной выпуклой функцией h (см. [2]).

Множество $\mathfrak{M}(\varphi)$, где $\varphi(h) = Dy(x, h)$, обозначим через $Dy(x)$ и назовем *производной* (обобщенной) выпуклой функции $y(x)$. Если $Dy(x, h)$ аддитивен по h, то $Dy(x)$ является линейным функционалом — производной Гато в обычном смысле. В общем случае $Dy(x)$ — это компактное множество сопряженного пространства E^*.

2. Пусть функция $y(x)$ выпукла на выпуклом открытом множестве $\mathscr{E}$ пространства E. Покажем сначала, что ее производная ограничена внутри области $\mathscr{E}$, а затем докажем непрерывность производной на $\mathscr{E}$. Введем в рассмотрение числовую функцию

$$\mu(x) = \max_{l \in Dy(x)} \| l \| \tag{1}$$

(максимум достигается по теореме Вейерштрасса).

Теорема 1. *Функция* $\mu(x)$ *ограничена на любом компактном множестве* $K \subset \mathscr{E}$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда для некоторого компактного множества $K \subset \mathscr{E}$ можно указать последовательность точек $x_n \in K$, для которой $x_n \to x_0$ $(x_0 \in K)$ и $\mu(x_n) = \| l_n \| \to \infty$, где $l_n \in Dy(x_n)$.

Для каждого n найдем вектор $h_n \in E$ такой, что

$$(h_n, l_n) = \| l_n \|, \quad \| h_n \| = 1. \tag{2}$$

Тогда при любом неотрицательном α справедливо неравенство

$$y(x_n + \alpha h_n) - y(x_n) \geqslant \alpha (h_n, l_n) = \alpha \| l_n \|. \tag{3}$$

Далее, из непрерывности $Dy(x, h)$ по h вытекает существование такой постоянной m, что

$$y(x) - y(x_0) \geqslant Dy(x_0, x - x_0) \geqslant m \| x - x_0 \|. \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) вытекает, что

$$y(x_n + \alpha_n h_n) - y(x_0) = y(x_n + \alpha_n h_n) - y(x_n) + y(x_n) - y(x_0) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_n \| l_n \| + m \| x_n - x_0 \| = \| x_n - x_0 \| \left(\frac{\| l_n \|}{2} + m \right),$$

т. е.

$$\| x_n - x_0 \| \left(\frac{\| l_n \|}{2} + m \right) \leqslant y(x_n + \alpha_n h_n) - y(x_0) \tag{5}$$

при $\alpha_n = \| x_n - x_0 \| / 2$.

С другой стороны, используя выпуклость функции $y(x)$, можно показать, что

$$y(x) - y(x_0) \leqslant \frac{M_\delta \| x - x_0 \|}{\delta} \quad (\| x - x_0 \| \leqslant \delta), \tag{6}$$

где

$$M_\delta = \max_{\| x - x_0 \| = \delta} | y(x) - y(x_0) |.$$

Из неравенств (5) и (6) получаем, что

$$\| x_n - x_0 \| \left(\frac{\| l_n \|}{2} + m \right) \leqslant y(x_n + \alpha_n h_n) - y(x_0) \leqslant \frac{3M_\delta \| x_n - x_0 \|}{2\delta},$$

откуда вытекает следующая оценка:

$$\| l_n \| \leqslant \frac{3M_\delta}{\delta} - 2m \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Последнее находится в противоречии с неограниченностью последовательности $\| l_n \|$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Производная $Dy(x)$ выпуклой функции $y(x)$, заданной на открытом выпуклом множестве $\mathscr{E} \subset E$, непрерывно зависит от x в следующем смысле: для любых $\xi \in \mathscr{E}$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\xi, \varepsilon) > 0$, что*

$$Dy(x) \subset U(Dy(\xi), \varepsilon) \quad \textit{при} \quad \| x - \xi \| < \delta \tag{7}$$

(здесь $U(Dy(\xi), \varepsilon)$ — ε-окрестность множества $Dy(\xi)$).

Доказательство. Предположим обратное. Тогда можно указать такие $x_0 \in \mathscr{E}$, $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $x_n \to x_0$ $(x_n \in \mathscr{E})$, что

$$Dy(x_n) \not\subset U(Dy(x_0), \varepsilon_0), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

В силу неравенства (8) и компактности каждого из множеств $Dy(x_n)$ можно найти элементы $l_1 \in Dy(x_1)$, $l_2 \in Dy(x_2)$, ..., для которых

$$\varrho(l_n, Dy(x_0)) \geqslant \varepsilon_0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Так как множество $Dy(x_0)$ выпукло и компактно, то для каждого номера n можно указать такие $z_n \in Dy(x_0)$ и $h_n \in E$, что

$$(h_n,\ l_n - z_n) = \| l_n - z_n \| \geqslant \varepsilon_0, \qquad \| h_n \| = 1, \tag{10}$$

$$(h_n,\ l - z_n) \leqslant 0 \qquad (l \in Dy(x_0)) \tag{11}$$

(здесь мы так же, как и в доказательстве теоремы 1, используем рефлексивность конечномерных пространств). Без ограничения общности можно считать, что $h_n \to h_0$, $\| h_0 \| = 1$, и $z_n \to z_0$, $z_0 \in Dy(x_0)$.

Покажем справедливость неравенства

$$(h_0,\ l_n) \geqslant (h_0,\ z_0) + \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (n > n_0). \tag{12}$$

Действительно, согласно (10), получаем, что

$$(h_0, l_n) = (h_n, l_n) + (h_0 - h_n, l_n) \geqslant (h_n, z_n) + \varepsilon_0 + (h_0 - h_n, l_n).$$

Так как $h_n \to h_0$, $z_n \to z_0$ и в силу теоремы 1 последовательность $\| l_n \|$ ограничена ($\| l_n \| \leqslant c$), то

$$(h_n, z_n) \geqslant (h_0, z_0) - \frac{\varepsilon_0}{4} \qquad (n > n_1),$$

$$|(h_0 - h_n, l_n)| \leqslant \| h_0 - h_n \| c < \frac{\varepsilon_0}{4} \qquad (n > n_2);$$

отсюда и вытекает неравенство (12) при $n_0 = \max(n_1,\ n_2)$.

Из (11) получаем неравенство $(h_n,\ l) \leqslant (h_n,\ z_n)$, устремляя в котором n к бесконечности, находим, что $(h_0,\ l) \leqslant (h_0,\ z_0)$ для любого $l \in Dy(x_0)$. Поэтому $Dy(x_0, h_0) = (h_0, z_0)$ и из неравенства (12) вытекает, что

$$Dy(x_n,\ h_0) \geqslant Dy(x_0,\ h_0) + \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (n > n_0). \tag{13}$$

Теперь доказательство завершается совсем просто. Так как

$$y(x_n + \alpha h_0) - y(x_n) \geqslant \alpha Dy(x_n,\ h_0) \qquad (\alpha > 0)$$

и

$$y(x_0 + \alpha h_0) - y(x_0) = \alpha Dy(x_0,\ h_0) + \alpha\omega(\alpha), \qquad 0 < \omega(\alpha) \to 0,$$

то в силу неравенства (13)

$$y(x_n + \alpha h_0) - y(x_n) \geqslant y(x_0 + \alpha h_0) - y(x_0) + \alpha\left(\frac{\varepsilon_0}{2} - \omega(\alpha)\right).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем ($y(x)$ непрерывна!) $\alpha\left(\frac{\varepsilon_0}{2} - \omega(\alpha)\right) \leqslant 0$, т. е. $\omega(\alpha) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $0 < \alpha$. Это противоречит определению функции $\omega(\alpha)$.

Теорема доказана.

Отметим, что дифференцируемость почти всюду выпуклой функции доказана в [3], а в работе А. Д. Александрова [4] установлено, что выпуклая функция всегда почти всюду дважды дифференцируема.

3. Приведем некоторые следствия из полученных нами теорем.

Используя теорему 1, просто можно показать, что функция $\mu(x)$, фигурирующая в теореме 1 (так сказать, норма производной $Dy(x)$ *полунепрерывна* сверху.

Выпуклая функция $y(x)$ на каждом компактном множестве $K \subset \mathscr{E}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|y(x_0) - y(x_1)| \leqslant \mu \| x_0 - x_1 \| \qquad (x_0,\ x_1 \in K),$$

где $\mu = \max \mu(x)$, *когда* x *пробегает выпуклую оболочку множества* K.

Прежде всего, выпуклая оболочка компактного множества K есть снова компактное множество и на этом множестве функция $\mu\ (x)$ ограничена и полунепрерывна сверху. Для получения нужной оценки используем теорему о среднем, согласно которой

$$y(x_1) - y(x_0) = (x_1 - x_0,\ l),$$

где $l \in Dy((1-\tau)x_0 + \tau x_1) \quad (0 < \tau < 1)$. Так как

$$\| l \| \leqslant \mu((1-\tau)x_0 + \tau x_1),$$

то наше утверждение доказано.

Непосредственное использование теоремы 2 приводит к следующему интересному результату: *для выпуклых функций из дифференцируемости по Гато вытекает непрерывная дифференцируемость по Фреше* (напомним, что дифференцируемость по Гато означает линейность $Dy\ (x,\ h)$ по h).

Дальнейшая эксплуатация теоремы 2 приводит еще к одному результату:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{|y(x) - y(\xi) - Dy(\xi,\ x - \xi)|}{\| x - \xi \|} = 0,$$

на доказательстве которого мы также не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, Гостехиздат, М., 1950.
2. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, ИЛ, М., 1962.
3. K. Reidemeister, Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers, Math. Ann., **83**, 1921, 116—118.
4. А. Д. Александров, Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и связанные с ним свойства выпуклой поверхности, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., т. 6, 1939, 3—35.

Поступила 24.VI 1965 г.
Воронеж