Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами

З. Г. Шефтель

1°. В данной заметке теория нормальной разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами [1, 2] распространяется на системы с разрывными коэффициентами, эллиптические в смысле Дуглиса — Ниренберга*. Методика исследования близка к примененной в [2 — 6].

2°. Пусть ограниченная область G n-мерного эвклидова пространства с границей Γ разбита на две части G и G_2 поверхностью γ, не имеющей с Γ общих точек. Введем прямую сумму пространств С. Л. Соболева на $\mathbf{W}^l_p(G_1) \dot{+} \mathbf{W}^l_p(G_2) = \mathbf{W}^l_p(G)$ ($l \geqslant 0$—целое, $p > 1$) с нормой $\|u\|_l$. Каждый эле-

* После того, как настоящая статья была направлена в печать, автору стало известно, что аналогичные результаты получил независимо и примерно одновременно Н. В. Житарашу.

мент $u \in \mathbf{W}_p^l(G)$ можно представить в виде $u(x) = u^1(x) + u^2(x)$, $u^r(x) \in \mathbf{W}_p^l(G_r)$.

Мы используем еще пространства дробного порядка $\mathbf{W}^{l-\frac{1}{p}}(S)$ с нормами $\|u\|_{l-\frac{1}{p}}$ [7—8] и пространства $\mathbf{C}^{l+\alpha}(D)$ с гельдеровскими нормами $|u|_{l+\alpha}^{D}$, $0 < \alpha < 1$ [8], а также пространство $\mathbf{C}^{l+\alpha}(G) = \mathbf{C}^{l+\alpha}(G_1) \dot{+} \mathbf{C}^{l+\alpha}(G_2)$ с нормой $|u|_{l+\alpha}^{G} = |u^1|_{l+\alpha}^{G_1} + |u^2|_{l+\alpha}^{G_2}$.

В области G рассматривается система с комплексными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{N} l_{ij}(x, D)\, u_j(x) = f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

эллиптическая в смысле Дуглиса — Ниренберга [3—5]. Коэффициенты дифференциальных выражений l_{ij} терпят разрывы 1-го рода вдоль поверхности γ, и мы полагаем $l_{ij}(x, D) = l_{ij}^r(x, D)$ при $x \in G_r$. Условие эллиптичности означает, что порядки дифференциальных выражений l_{ij} зависят от двух систем целых чисел $s_1, \ldots, s_N$ и $t_1, \ldots, t_N$, так что порядок l_{ij} не превосходит $s_i + t_j$ и $l_{ij} \equiv 0$ при $s_i + t_j < 0$; при этом полиномы $L^r(x, \xi) = \det(l_{ij}^{r0}(x, \xi))$, где l_{ij}^{r0} — главная часть l_{ij}^r, содержащая только члены порядка $s_i + t_j$, не обращаются в нуль ни для какого действительного $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$. Добавляя ко всем s_i подходящую постоянную и вычитая ее из всех t_j, можно добиться того, чтобы $\max_i s_i = 0$; тогда обязательно $\min_j t_j \geqslant 0$. Пусть x — любая фиксированная точка на $\Gamma(\gamma)$; рассмотрим полиномы $L^r(\eta) = L^r(x, \tau + \eta\nu)$, где $\tau \neq 0$ — любой действительный вектор, касательный к $\Gamma(\gamma)$ в точке x, ν — орт нормали к $\Gamma(\gamma)$ в x. Из эллиптичности следует, что $L^r(\eta)$ не имеют действительных корней. Систему (1) называют **правильно эллиптической**, если $L^r(\eta)$ $(r = 1, 2)$ — полиномы четной степени $2m$ и комплексные корни каждого из них расположены поровну в верхней и нижней полуплоскостях (при $n \geqslant 3$ это условие всегда выполняется [9]). В этом случае можно положить $L^r(\eta) = L^{r+}(\eta)\, L^{r-}(\eta)$ $(r = 1, 2)$, где L^{r+} (L^{r-}) — полиномы степени m, все корни которых имеют положительные (отрицательные) мнимые части. Через $L_r^{ij}(x, \xi)$ обозначим алгебраическое дополнение элемента $l_{ij}^{r0}(x, \xi)$ детерминанта $L^r(x, \xi)$.

Будем изучать решения системы (1) в области G, удовлетворяющие на поверхности разрыва γ следующим условиям сопряжения:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(B_{kj}^1(x, D)\, u_j^1(x) - B_{kj}^2(x, D)\, u_j^2(x)\right)\Big|_{\gamma} = \varphi_k(x) \qquad (k = 1, \ldots, 2m), \tag{2}$$

а на границе области Γ — граничным условиям

$$\sum_{j=1}^{N} B_{hj}^3(x, D)\, u_j(x)\Big|_{\Gamma} = \psi_h(x) \qquad (h = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Здесь B_{kj}^r $(r = 1, 2, 3)$ — линейные дифференциальные выражения с комплексными коэффициентами, причем существуют такие целые σ_k^r $(r = 1, 2, 3;\ \sigma_k^1 = \sigma_k^2)$, что порядок B_{kj}^r не превосходит $\sigma_k^r + t_j$ и $B_{kj}^r \equiv 0$ при $\sigma_k^r + t_j < 0$; через B_{kj}^{r0} обозначим главную часть B_{kj}^r, состоящую из членов порядка $\sigma'_k + t_j$. Ниже будут рассматриваться лишь граничные условия и условия сопряжения, для которых выполнено следующее условие дополнительности. Будем говорить, что условия (2), (3) являются дополнительными для системы (1), если условия (3) на Γ удовлетворяют обычному требованию дополнительности [3, 4], а для условий сопряжения (2) на γ выполнено следующее требование: в любой точке $x \in \gamma$ строки матриц

$$(M^r_{ki}(\eta)) = \left(\sum_{j=1}^{N} B^{r0}_{kj}(x, \tau + \eta\nu) L^{ji}_r(x, \tau + \eta\nu)\right)_{\substack{k=1, \dots, 2m, \\ i=1, \dots, N}} \qquad (r = 1, 2),$$

элементы которых рассматриваются как полиномы от η, линейно независимы по модулю $\begin{pmatrix} L^{1+}(\eta) \\ L^{2-}(\eta) \end{pmatrix}$. Это значит, что соотношения

$$\sum_{k=1}^{2m} c_k M^1_{ki}(\eta) \equiv 0 \pmod{L^{1+}(\eta)} \qquad (i = 1, \dots, N),$$

$$\sum_{k=1}^{2m} c_k M^2_{ki}(\eta) \equiv 0 \pmod{L^{2-}(\eta)}$$

с постоянными c_k могут выполняться лишь при $c_1 = \dots = c_{2m} = 0$.

При естественных условиях гладкости поверхностей Γ и γ и коэффициентов выражений l'_{ij}, B^r_{kj} (ср. [4]) имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Положим* $l_0 = \max\limits_{k,r}\{0, \sigma'_k\}$, $l \geqslant l_0$ — *целое*, $0 < \alpha < 1$, *и пусть* $u = (u_1, \dots, u_N)$ — *решение задачи* (1) — (3), $u_j \in \mathrm{C}^{l_0+t_j+\alpha}(G)$, *причем* $f_i \in \mathrm{C}^{l-s_i+\alpha}(G)$, $\varphi_k \in \mathrm{C}^{l-\sigma_k+\alpha}(\gamma)$, $\psi_k \in \mathrm{C}^{l-\sigma^3_h+\alpha}(\Gamma)$. *Правильная эллиптичность системы* (1) *и требования дополнительности условий* (2), (3) *необходимы и достаточны для того, чтобы* $u_j \in \mathrm{C}^{l+t_j+\alpha}(G)$ *и*

$$|u_j|^G_{l+t_j+\alpha} \leqslant K\left(\sum_{i=1}^{N} |f_i|^G_{l-s_i+\alpha} + \sum_{k=1}^{2m} |\varphi_k|^\gamma_{l-\sigma_k+\alpha} + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{m} |\psi_h|^\Gamma_{l-\sigma^3_h+\alpha} + \sum_{i=1}^{N} |u_i|^G_0\right),$$

где постоянная $K > 0$ *не зависит от* f_i, φ_k, ψ_h.

Теорема 2. *Положим* $l_1 = \max\limits_{k,r}\{0, \sigma^r_k + 1\}$, $l \geqslant l_1$ — *целое, и пусть* $u = (u_1, \dots, u_N)$ — *решение задачи* (1), (3), $u_j \in \mathrm{W}^{l_1+t_j}_p(G)$, *причем* $f_i \in \mathrm{W}^{l-s_i}_p(G)$, $\varphi_k \in \mathrm{W}_p^{l-\sigma_k-\frac{1}{p}}(\gamma)$, $\psi_h \in \mathrm{W}_p^{l-\sigma^3_h-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. *Правильная эллиптичность системы* (1) *и требования дополнительности условий* (2), (3) *необходимы и достаточны для того, чтобы* $u_j \in \mathrm{W}^{l+t_j}_p(G)$ *и*

$$\|u_j\|_{l+t_j} \leqslant K\left(\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{l-s_i} + \sum_{k=1}^{2m} \|\varphi_k\|_{l-\sigma_k-\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{m} \|\psi_h\|_{l-\sigma^3_h-\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_0\right), \tag{5}$$

где постоянная $K > 0$ *не зависит от* f_i, φ_k, ψ_h.

При доказательстве этих теорем применяется обычная методика Шаудера, которая дает возможность с помощью разбиения области и распрямления кусков поверхностей γ и Γ свести доказательство к простейшему случаю системы с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{j=1}^{N} l_{ij}^{r0}(x^{(0)}, D)\, u_j^r(x) = f_i^r(x) \qquad (r = 1, 2), \tag{6}$$

где $x^{(0)} \in \overline{G}$. В том случае, например, когда $x^{(0)} \in \gamma$, доказательство приводится к оценке решений системы (6), удовлетворяющих на гиперплоскости $x_n = 0$ условиям сопряжения

$$\sum_{j=1}^{N} B_{kj}^{10}(x^{(0)}, D)\, u_j^1(x)\Big|_{x_n=+0} - \sum_{j=1}^{N} B_{kj}^{20}(x^{(0)}, D)\, u_j^2(x)\Big|_{x_n=-0} = \varphi_k(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 2m). \tag{7}$$

Пользуясь методикой работы [4], нетрудно получить явные формулы для решений задачи (6), (7) и оценить нормы этих решений. При построении этих формул приходится рассматривать задачу отыскания решений двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно на полуосях $t > 0$ и $t < 0$ с некоторым линейным условием сопряжения в точке $t = 0$. Условие дополнительности как раз и является необходимым и достаточным условием существования единственного решения этой задачи в классе экспоненциально убывающих на бесконечности функций [10].

3°. Введем для целых $l \geqslant l_1$ прямые произведения соболевских пространств целых и дробных порядков

$$H^l = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{W}_p^{l+t_j}(G),$$

$$K^l = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{W}_p^{l-s_i}(G) \times \prod_{k=1}^{2m} \mathbf{W}_p^{l-\sigma_k-\frac{1}{p}}(\gamma) \times \prod_{h=1}^{m} \mathbf{W}_p^{l-\sigma_h^3-\frac{1}{p}}(\Gamma).$$

Тогда с задачей (1), (3) мы можем связать оператор $\mathfrak{A}$, переводящий вектор-функцию $u = (u_1, \ldots, u_N) \in H^l$ в элемент $\mathfrak{A}u = (f_1, \ldots, f_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2m}, \psi_1, \ldots, \psi_m) \in K^l$. При естественных предположениях гладкости поверхностей Γ и γ и коэффициентов выражений l_{ij}^r, B_{kj}^r справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть система* (1) *правильно эллиптична и для условий* (2), (3) *выполнено требование дополнительности. Тогда оператор* $\mathfrak{A}$ *является* Ф-*оператором в смысле* [11]. *Это означает следующее*: а) *уравнение* $\mathfrak{A}u = 0$ *имеет в* H^l *конечное число линейно-независимых решений, т. е. ядро оператора* $\mathfrak{A}$ *конечномерно*; б) *область значений оператора* $\mathfrak{A}$ *в* K^l *замкнута и имеет конечную коразмерность.*

Доказательство конечномерности ядра оператора $\mathfrak{A}$ и замкнутости его области значений легко выводится обычным методом (ср. [12]) из оценки (5), которую можем записать в виде

$$\| u \|_{H^l} \leqslant K(\| \mathfrak{A}u \|_{K^l} + \| u \|_0).$$

Конечность коразмерности доказывается, как и в [6], с помощью теоремы Рисса о вполне непрерывных операторах путем построения регуляризатора для $\mathfrak{A}$, т. е. такого оператора $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{A}\mathfrak{M} = E + S$, где E — единичный, S — вполне непрерывный оператор в K^l. Идея такого построения принадлежит, по-видимому, Браудеру, который применил ее для случая нулевых условий Дирихле [12].

4°. Используя оценку (4) и теоремы вложения, нетрудно получить, как это сделано в [2, 6], результаты о разрешимости задачи (1), (3) в классическом смысле.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Г. Шефтель, Оценки в L_p решений эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющих общим граничным условиям и условиям сопряжения, ДАН СССР, т. 149, № 1, 1963, 48—51.
2. З. Г. Шефтель, Разрешимость в L_p и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, УМН, т. 19, № 4, 1964, 230—232.
3. В. А. Солонников, Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем, ДАН СССР, т. 151, № 4, 1963, 783—785.
4. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure and Appl. Math., 17, N1, 1964, 35—92.
5. Л. Р. Волевич, К теории краевых задач для общих эллиптических систем, ДАН СССР, т. 148, № 3, 1963, 489—492.
6. З. Г. Шефтель, Теория эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. L_p-оценки решений, Автореф. дис., Изд-во Воронежск. гос. ун-та, 1963.
7. Л. Н. Слободецкий, Оценки в L_p решений эллиптических систем, ДАН СССР, т. 123, № 4, 1958, 616—619.
8. С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, М., 1962.
9. Я. Б. Лопатинский, Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, УМЖ, т. V, № 2, 1953, 123—151.
10. З. Г. Шефтель, Задача сопряження для двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Тези доповідей VII-ої звітної наукової конференції Дрогобицького педагогічного інституту, Секція фіз.-мат. наук, Дрогобич, 1965.
11. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, т. 12, № 2, 1957, 43—118.
12. F. E. Browder, Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 1959, 365—372.

Поступила 27. II 1965 г.
Дрогобыч