УДК 519.21—517.983

М. Ю. Козаченко

Необходимое и достаточное условие изоморфизма мультипликативных и аддитивных систем без условий непрерывности с точностью до измельчающихся разбиений

В настоящей работе обобщаются результаты, полученные в [2].

Пусть R — банахово кольцо с единицей 1 и нормой $|\cdot|$. Множество точек $0 \leqslant s = t_0^n \leqslant t_1^n \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^n = t < \infty$ называется разбиением $[s, t]$ и обозначается $\Delta_n[s, t]$. Последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, называется монотонной, если $\Delta_n \subset \Delta_{n+m}$, $m, n = \overline{1, \infty}$, и измельчающейся, если $\delta_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Если для двух функций $f(\cdot)$, $F(\cdot): [s, t] \to R$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(t_{k-1}^n)(F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)) = \lim_{n\to\infty} (e) \sum (\Delta_n) = (e) \int_s^t f(\tau)\, dF(\tau),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(t_k^n)(F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)) = \lim_{n\to\infty} (r) \sum (\Delta_n) = (r) \int_s^t f(\tau)\, dF(\tau),$$

которые не зависят от последовательности разбиений $\{\Delta_n [s, t[\}$, то эти пределы называются соответственно левым и правым интегралом Стильтьеса от $f(\tau)$ по $F(\tau)$.

Утверждение 1. *Если функции $f(\cdot)$ и $F(\cdot)$ на $[s, t]$ имеют ограниченную вариацию в норме $|\cdot|$, то для существования $(e)\int_s^t f(\tau)\,dF(\tau)$ необходимо и достаточно, чтобы в каждой их общей точке разрыва выполнялось следующее условие регулярности: $(f(\tau) - f(\tau - 0))(F(\tau + 0) - F(\tau)) = 0$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы из [1] и поэтому опускается.

Воспользовавшись далее указанным выше условием регулярности и методом доказательства теоремы из [1], можно также легко показать, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если функции $f(\cdot)$ и $F(\cdot)$ на $[s, t]$ имеют ограниченную вариацию в норме $|\cdot|$, то выполняются следующие равенства:*

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=2}^{m_n} f(t_{k-1}^n)\,(F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)) = \lim_{\delta_n\to 0}\,(e)\int_{t_i^n}^{t} f(\tau)\,dF(\tau) = (e)\int_{s+0}^{t} f(\tau)\,dF(\tau),$$

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{m_n-1} f(t_{k-1}^n)\,(F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)) =$$

$$= \lim_{\alpha_n\to 0}\,(e)\int_{s}^{t_{m_n-1}^n} f(\tau)\,dF(\tau) = (e)\int_{s}^{t-0} f(\tau)\,dF(\tau),$$

причем пределы, стоящие в левых частях этих равенств, не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n\,[s, t]$.

Определение 1. *Двупараметрическое семейство x_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$, элементов из R называется М-системой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$x_s^\tau x_\tau^t = x_s^t,\quad x_\tau^\tau = I,\quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty, \tag{1}$$

$$\sup_{\Delta[0,T]}\sum_{k=1}^{m_n} |x_{t_{k-1}}^{t_k} - I| < \infty, \tag{2}$$

$$(x_{\tau-0}^\tau - I)\,(x_\tau^{\tau+0} - I) = 0,\quad 0 \leqslant \tau \leqslant T < \infty. \tag{3}$$

Определение 2. *Двупараметрическое семейство y_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$, элементов из R называется А-системой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$y_s^\tau + y_\tau^t = y_s^t,\quad y_\tau^\tau = 0,\quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty, \tag{4}$$

$$\sup_{\Delta[0,T]}\sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}| < \infty, \tag{5}$$

$$y_{\tau-0}^\tau y_\tau^{\tau+0} = 0,\quad 0 \leqslant \tau \leqslant T < \infty. \tag{6}$$

Замечание 1. В настоящей работе в крайних точках $[0, T]$ предполагается непрерывность соответственно слева и справа.

Замечание 2. В отличие от работы [2] рассматривается более широкий класс M- и A-систем, в которых вместо условий $\forall\tau\in[0, T]$ $|x_{\tau-0}^\tau - I|\,|x_\tau^{\tau+0} - I| = 0$ и $|y_{\tau-0}^\tau|\,|y_\tau^{\tau+0}| = 0$ требуется выполнение условий (3) и (6) соответственно.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что из условий (1), (2) и (4), (5) вытекает существование пределов x_{s-0}^{t}, x_{s}^{t+0}, $x_{t+0}^{t+0}=I$, $x_{s-0}^{s-0}=I$ и y_{s-0}^{t}, y_{s}^{t+0}, $y_{t+0}^{t+0}=0$, $y_{s-0}^{s-0}=0$.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Между множеством* $\mathfrak{M}\,[0,\,T]$ *всех* M*-систем на* $[0,\,T]$ *и множеством* $\mathfrak{N}\,[0,\,T]$ *всех* A*-систем на* $[0,\,T]$ *существует взаимно однозначное отображение* D, *устанавливаемое по формулам*

$$y_s^t = D(x)_s^t = \lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{m_n}\left(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I\right) = \lim_{\delta_n\to 0}\sum (x)(\Delta_n\,[s,t]), \tag{7}$$

$$x_s^t = D^{-1}(y)_s^t = \lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}\left(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I\right) = \lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod}(y)(\Delta_n\,[s,t]), \tag{8}$$

где $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T<\infty$, произведение $\overrightarrow{\Pi}$ берется в порядке возрастания индекса k слева направо, а пределы не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n\,[0,\,T]$.

З а м е ч а н и е 4. Как будет показано ниже, условия регулярности (3), (6) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы в формулах (7), (8) предел не зависел от последовательности разбиений $\Delta_n\,[0,\,T]$.

Доказательству этой теоремы предпошлем ряд лемм.

Л е м м а 1. *Если в каждой точке* $t\in[0,T]$ *справедливо неравенство* $|x_{t-0}^{t+0}-I|<1$, *то при* $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ *существует* $(x_s^t)^{-1}$, *и функция* $|(x_s^t)^{-1}|$ *ограничена на* $[0,T]$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 в [2], поэтому мы его не приводим.

Л е м м а 2. *Если* M*-система* x_s^t *удовлетворяет условию леммы 1, то существует предел*

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{m_n}\left(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I\right) = D(x)_s^t = y_s^t,$$

который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\,[s,\,t]\}$ *и этот предел, как функция от* s *и* t, *является* A*-системой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в [2], достаточно показать, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall\,\Delta_n,\,\Delta_r$, у которых $\delta_n,\,\delta_r<\delta(\varepsilon)$ и $\Delta_r\supset\Delta_n$, справедливо неравенство $|\Sigma(x)(\Delta_n)-\Sigma(x)(\Delta_r)|<\varepsilon$. Для этого оценим разность

$$\left|\sum (x)(\Delta_r) - \sum (x)(\Delta_n)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m_n}\left(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I\right) - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}\left(x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - I\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}\left(x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - I\right)\left(x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - I\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}\left(x_0^{t_{k-1}^n}\right)^{-1}\left(x_0^{s_{i-1}^k} - x_0^{t_{k-1}^n}\right)\left(x_{s_{i-1}^k}^T -\right.\right.$$

$$\left.\left. - x_{s_i^k}^T\right)\left(x_{s_i^k}^T\right)^{-1}\right| \leqslant C_1^2(T)\sum_{i=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}\left|\left(x_0^{s_{i-1}^k} - x_0^{t_{k-1}^n}\right)\left(x_{s_{i-1}^k}^T - x_{s_i^k}^T\right)\right|, \tag{9}$$

где $C_1(T)$ — некоторая константа, существование которой вытекает из леммы 1.

Если положить $x_0^t = f(t)$, $x_t^T = F(t)$, то в правой части (9) стоит точно такая же сумма, как и в левой части (3) из [1]. Используя условия (1)—(3), можно легко показать, что эти функции удовлетворяют условию утверждения. Поэтому на основании утверждения 1 и получаем доказательство первой части леммы.

Для доказательства ее второй части заметим, что точку τ всегда можно присоединить к любому разбиению $\Delta_n\,[s,t]$, откуда по доказанному будет следовать свойство (4). Свойство (5) следует из очевидной оценки

$$|D(x)_s^t| \leqslant \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} |x_{t_{k-1}}^{t_k} - I| = F(s,t) < \infty. \tag{10}$$

Покажем, что справедливо свойство (6). Для этого заметим, что аналогично доказательству формулы (7) (см. (9)) на основании утверждения 2 можно показать, что существуют и не зависят от последовательности разбиений $\{\Delta_n\,[s,t]\}$ следующие пределы:

$$\check{y}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=2}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_j^n} - I), \quad \check{\check{y}}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n - 1} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I). \tag{11}$$

Если теперь доказать, что

$$\check{y}_\tau^{\tau+0} = 0, \quad \tau \in [0, T); \qquad \check{\check{y}}_{\tau-0}^{\tau} = 0, \quad \tau \in (0, T], \tag{12}$$

то переходя к пределу в равенствах

$$\sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I) = \sum_{k=2}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I) + (x_s^{t_1^n} - I),$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k} - I) = \sum_{k=1}^{m_n - 1} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I) + (x_{t_{m_n-1}^n}^{t} - I),$$

получаем $y_s^t = \check{y}_s^t + (x_s^{s+0} - I)$, $y_s^t = \check{\check{y}}_s^t + (x_{t-0}^t - I)$. Переходя к пределу в первом из них $t \downarrow s$ при фиксированном s, и во втором по $s \uparrow t$ при фиксированном t, учитывая (12), получим $y_s^{s+0} = x_s^{s+0} - I$, $y_{t-0}^t = x_{t-0}^t - I$. Отсюда свойство (6) очевидно вытекает.

Таким образом, осталось доказать свойство (12). Для этого обозначим $f(s,t) = \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} |x_0^{t_k} - x_0^{t_{k-1}}| \leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |x_0^\tau| \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} |x_{t_{k-1}}^{t_k} - I| < \infty$. Легко показать, что при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ справедливо равенство $f(s,t) = f(0,t) - f(0,s)$. Воспользовавшись теперь леммой 1, запишем неравенство

$$\Big|\sum_{k=2}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I)\Big| = \Big|\sum_{k=2}^{m_n} (x_0^{t_{k-1}^n})^{-1} (x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n})\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=2}^{m_n} |x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n}| \leqslant C_1 (f(0,t) - f(0,t_1^n)).$$

Переходя к пределу при $\delta_n \to 0$, получим $|\check{y}_s^t| \leqslant C_1 (f(0,t) - f(0, s+0))$. Переходя, наконец, к пределу в этом неравенстве по $t \downarrow s$, при фиксированном s получим первое из требуемых равенств (12). Второе получается аналогично. Отметим, что равенства (12) и свойство (4) влекут следующие равенства:

$$\check{y}_s^t = y_{s+0}^t, \quad \check{\check{y}}_s^t = y_s^{t-0}, \tag{13}$$

которые получаются соответствующим предельным переходом по τ из очевидных равенств

$$\check{y}_s^\tau + y_\tau^t = \check{y}_s^t, \quad y_s^\tau + \check{\check{y}}_\tau^t = \check{\check{y}}_s^t. \tag{14}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для A-систем y_s^t справедливы оценки*

$$\left|\prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I)\right| \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\}, \tag{15}$$

$$\left|\prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I) - (y_s^t + I)\right| \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} \left|\sum_{i=1}^{m_n} y_{t_0^n}^{t_{k-1}^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right|, \tag{16}$$

где $\varphi(t) = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \sum\limits_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}| < \infty.$

Доказательство. Легко видеть, что для любых элементов $A_i \in R$, $i = \overline{1, n}$ справедливы неравенства

$$\left|\sum_{1\leqslant i<j<k_1<\ldots<k_r\leqslant n} A_i A_j A_{k_1} \ldots A_{k_r}\right| \leqslant \left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_i A_j\right| \left|\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_r\leqslant n} A_{k_1} \ldots A_{k_r}\right|,$$

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n} |A_{i_1}| \ldots |A_{i_k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |A_i|^k\right) \frac{1}{k!}.$$

Поэтому

$$\left|\prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I) - (y_s^t + I)\right| = \left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m_n} y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m_n} y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \ldots + y_s^{t_1^n} \ldots y_{t_{m_n-1}^n}^{t_{m_n}^n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m_n} y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\right| \sum_{p=0}^{n-2} \left(\sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|\right)^p \frac{1}{p!} \leqslant \left|\sum_{i=1}^{1} y_{t_0^n}^{t_i^n} y_{t_1^n}^{t_r^n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} y_{t_0^n}^{t_i^n} y_{t_r^n}^{t_3^n} + \ldots + \sum_{i=1}^{m_n-1} y_{t_0^n}^{t_i^n} y_{t_{m_n-1}^n}^{t_{m_n}^n}\right| \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{m_n} y_s^{t_{k-1}^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right| \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\}$$

и оценка (16) доказана. Доказательство оценки (15) аналогично.

Лемма 4. *Для всякой A-системы y_s^t при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ существует предел*

$$\overline{D}(y)_s^t = \lim_{\delta_n\to 0} \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I) = \lim_{\delta_n\to 0} \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} (y)(\Delta_n),$$

который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\ (s, t]\}$ и, как функция этого отрезка, является M-системой. Здесь произведение $\overrightarrow{\Pi}$ берется в порядке возрастания индекса слева направо.

Доказательство. Использовав лемму 3, оценим разность

$$|\overrightarrow{\Pi}(y)(\Delta_r) - \overrightarrow{\Pi}(y)(\Delta_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \left|\prod_{j=1}^{\overrightarrow{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{\overrightarrow{r_j}} (y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + I)\right|\right| \prod_{i=1}^{\overrightarrow{r_k}} (y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + I) -$$

$$-(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I)\Big|\Big|\overrightarrow{\prod_{j=k+1}^{m_n}}(y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+I)\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\exp\{\varphi(t_j^n)-\varphi(t_{j-1}^n)\}\Big|\times$$

$$\times\exp\{\varphi(t_k^n)-\varphi(t_{k-1}^n)\}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}y_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k}y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}\Big|\exp\{\varphi(t)-\varphi(t_{k-1}^n)\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\exp 3\{\varphi(t)-\varphi(s)\}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}y_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k}y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\exp 3\{\varphi(t)-\varphi(s)\}\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}|(y_{t_{k-1}^n}^t-y_{s_{i-1}^k}^t)(y_{s_{i-1}^k}^t-y_{s_i^k}^t)|. \qquad (17)$$

Если теперь обозначить $y_s^t=f(s)$, то двойная сумма в правой части (17) превратится в выражение, аналогичное левой части равенства (3) из [1], а с помощью свойств (4)—(6) легко показать, что функция $f(s)$ удовлетворяет условию регулярности. Теперь на основании утверждения 1 получаем доказательство первой части леммы 4.

Для доказательства второй ее части заметим, что свойство (2) у $\overline{D}(y)_s^t$ очевидно вытекает из оценки (15). Так как точку τ всегда можно присоединить к любому разбиению Δ_n $[s, t]$, то отсюда по доказанному свойство (1) для $D(y)_s^t$ вытекает очевидным образом. Для доказательства свойства (3) аналогично доказательству формул (11), опираясь на утверждение 2 и (17), получаем, что существуют пределы

$$\check{x}_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod_{k=2}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I),\quad \check{\check{x}}_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n-1}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I), \qquad (18)$$

удовлетворяющие свойствам

$$\check{x}_\tau^{\tau+0}=I,\quad \tau\in[0,T);\qquad \check{\check{x}}_{\tau-0}^{\tau}=I,\quad \tau\in(0,T], \qquad (19)$$

которые мы докажем ниже. Тогда, используя свойства (18) и переходя к пределу в равенствах

$$\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I)=(y_s^{t_1}+I)\overrightarrow{\prod_{k=2}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I),$$

$$\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I)=\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n-1}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I)(y_{t_{m_n-1}^n}^t+I),$$

получаем следующие равенства:

$$\overline{D}(y)_s^t=(y_s^{s+0}+I)\check{x}_s^t,\quad \overline{D}(y)_s^t=\check{\check{x}}_s^t\cdot(y_{t-0}^t+I).$$

Переходя к пределу в последних по $t\downarrow s$ и $s\uparrow t$ соответственно, с учетом (19) имеем соотношения

$$\overline{D}(y)_s^{s+0}=y_s^{s+0}+I,\qquad \overline{D}(y)_{t-0}^t=y_{t-0}^t+I, \qquad (20)$$

из которых свойство (3) для $\overline{D}(y)_s^t$ очевидно вытекает. Используя равенства (20), легко показать, что справедливы равенства

$$D(y)_{s+0}^t=\check{x}_s^t,\quad D(y)_s^{t-0}=\check{\check{x}}_s^t, \qquad (21)$$

которые получаются соответствующим предельным переходом по τ в очевидных равенствах $\check{x}_s^\tau \bar{D}(y)_\tau^t = \check{x}_s^t$, $\bar{D}(y)_s^\tau \check{\check{x}}_\tau^t = \check{\check{x}}_s^t$. Осталось доказать равенства (19). Для доказательства первого из них запишем неравенство

$$\Big|\overrightarrow{\prod_{k=2}^{m_n}}\big(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I\big)-I\Big|=\Big|y_{t_1^n}^{t}+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant m_n}y_{t_{j-1}^n}^{t_i^n}y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+\dots+y_{t_1^n}^{t_r^n}\cdots y_{t_{m_n-1}^n}^{t_{m_r}^n}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant|y_{t_1^n}^{t}|\,\Big|\sum_{p=0}^{n-2}\Big(\sum_{k=2}^{m_n}|y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|\Big)^p\frac{1}{p!}\leqslant|y_{t_1^n}^{t}|\,|\exp(\varphi(t)-\varphi(t_1^n))-I|\leqslant$$

$$\leqslant C_2\,|\exp(\varphi(t)-\varphi(t_1^n))-I|\leqslant C_2(\varphi(t)-\varphi(t_1^n)),$$

где $C_2=\max\limits_{\Delta_n[s,t]}|y_{t_1^n}^{t}|$.

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\delta_n\to 0$, получаем следующую оценку: $|\check{x}_s^t-I|\leqslant(\varphi(t)-\varphi(s+0))\,C_2$. Теперь предельным переходом по $t\downarrow s$ при фиксированном s получаем первое из равенств (19). Второе доказывается аналогично.

Лемма 5. *Формулы* (7) *и* (8) *остаются справедливыми, если у* M-*системы* x_s^t *и* A-*системы* y_s^t *убрать или добавить в точках непрерывности конечное число скачков.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 из [2], так как в нем нигде не используются условия (3) и (6).

Доказательство теоремы. В силу леммы 2 для M-системы $x_s^t\in\in\mathfrak{M}[0,T]$, у которой $\forall\tau\in[0,T]$, $|x_{\tau-0}^{\tau+0}-I|<1$, определен при $0\leqslant s\leqslant\leqslant t\leqslant T$ предел $D(x)_s^t=y_s^t$ и этот предел является A-системой. Покажем, что $x_s^t=\bar{D}(D(x)_s^t)$ при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$. Для этого оценим разность

$$\Big|x_s^t-\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}\big(D(x)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I\big)\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}x_s^{t_{k-1}^n}\big(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-(D(x)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I)\big)\times$$

$$\times\overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}}\big(D(x)_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}+I\big)\Big|\leqslant(1+F(s,t))\exp F(s,t)\times$$

$$\times\lim_{\delta_r\to 0}\sum_{k=1}^{m_n}\Big|x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-\Big(\sum_{i=1}^{r_k}(x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}-I)+I\Big)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant(1+F(s,t))\exp F(s,t)\,C_1(T)\lim_{\delta_r\to 0}\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}|(x_0^{s_{i-1}}-x_0^{t_{k-1}^n})(x_{s_{i-1}^k}^T-x_{s_i^k}^T)|.\quad(22)$$

Здесь $\delta_r=\max\limits_{i,k}(s_i^k-s_{i-1}^k)$.

Правая часть (22) стремится к нулю аналогично правой части (9). Используя лемму 5, избавляемся от условия леммы 1, и заключаем, что отображение D является вложением $\mathfrak{M}[0,T]$ в $\mathfrak{N}[0,T]$. Покажем теперь, что D отображает $\mathfrak{M}[0,T]$ на $\mathfrak{N}[0,T]$. Для этого возьмем произвольную точку $y\in\mathfrak{N}[0,T]$ и при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ построим $\bar{D}(y)_s^t$. По лемме 4 $\bar{D}(y)_s^t\in\in\mathfrak{M}[0,T]$. Покажем, что $D(\bar{D}(y)_s^t)=y_s^t$. Для этого, используя (16), оценим разность

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\big(\bar{D}(y)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-I\big)-y_s^t\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\big|\bar{D}(y)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+I)\big|=$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \lim_{\delta_r \to 0} \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}} (y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + I) - (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I) \Big| \leqslant \lim_{\delta_r \to 0} \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \sum_{i=1}^{r_k} y_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} \Big| \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} \times$$

$$\times \lim_{\delta_r \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} |(y_{t_{k-1}^n}^t - y_{s_{i-1}^k}^t)(y_{s_{i-1}^k}^t - y_{s_i^k}^t)|. \tag{23}$$

Последнее выражение стремится к нулю, как и правая часть (17).

Замечание 5. Как видно из следующих примеров, условия регулярности (3) и (6) являются необходимыми для того, чтобы при условиях (1), (2) и (4), (5) пределы (7) и (8) соответственно не зависели от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$.

Пример 1. Если не предполагать выполненным условие (3) в некоторой точке $\tau \in \in (s, t)$, то при $\tau \notin \Delta_n$, $t_{k-1}^n < \tau < t_k^n$, $\delta_n \to 0$ будет выполняться соотношение

$$|\Sigma(x)(\Delta_n \cup \tau) - \Sigma(x)(\Delta_n)| = |(x_{t_{k-1}^n}^\tau - I)(x_\tau^{t_k^n} - I)| \to |(x_{\tau-0}^\tau - I)(x_\tau^{\tau+0} - I)| \neq 0$$

и, следовательно, предел (7) будет зависеть от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$.

Пример 2. Для A-системы y_s^t запишем равенство

$$|\vec{\Pi}(y)(\Delta_n \cup \tau) - \vec{\Pi}(y)(\Delta_n)| = \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I)\, [(y_{t_{k-1}^n}^\tau + I)(y_\tau^{t_k^n} + I) -$$

$$- (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I)] \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I) \Big| = \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I)\, [y_{t_{k-1}^n}^\tau y_\tau^{t_k^n}] \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I) \Big| \tag{24}$$

и предположим, что только в одной точке $\tau \in (s, t) \in [0, T]$ условие (6) не выполняется, т. е. $y_{\tau-0}^\tau y_\tau^{\tau+0} \neq 0$. Тогда, воспользовавшись предыдущими результатами и равенствами (21), переходя к пределу по $t_{k-1}^n \uparrow \tau \downarrow t_k^n$ при $\delta_n \to 0$ в (24), получаем соотношение

$$\lim_{\delta_n \to 0} |\vec{\Pi}(y)(\Delta_n \cup \tau) - \vec{\Pi}(y)(\Delta_n)| = |x_s^{\tau-0} y_{\tau-0}^\tau y_\tau^{\tau+0} x_{\tau+0}^t|.$$

В этом соотношении s и t всегда можно выбрать так, используя свойства $x_{\tau-0}^{\tau-0} = I$, $x_{\tau+0}^{\tau+0} = I$ (см. замечание 3), что его правая часть не обратится в нуль. Но тогда и пределы $\lim\limits_{\delta_n \to 0} \vec{\Pi}(y)(\Delta_n \cup \tau)$ и $\lim\limits_{\delta_n \to 0} \vec{\Pi}(y)(\Delta_n)$, если они существуют, будут различны.

Таким образом, класс M-систем $\mathfrak{M}[0, T]$ является максимальным классом, который может быть однозначно описан с помощью соответствующих A-систем из $\mathfrak{N}[0, T]$, когда измельчающаяся последовательность разбиений Δ_n не фиксируется.

1. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР.— 1984, № 12.— С. 3—6.
2. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп без условия непрерывности // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 2.— С. 168—175.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.06.86