УДК 517.43

Г. В. Радзиевский

Кратная минимальность корневых векторов полиномиального пучка операторов, возмущенного аналитической вне круга оператор-функцией $S(\lambda)$ с $S(\infty) = 0$

Данная работа посвящена доказательству минимальности производных по Келдышу цепочек, построенных по каноническим системам корневых векторов [1, 2] оператор-функции

$$L(\lambda) = I + L_0 + \lambda L_1 + \dots + \lambda^n L_n + S(\lambda). \tag{1}$$

Через $\mathfrak{H}$ будем обозначать сепарабельное гильбертово пространство, $[\mathfrak{H}]$ и $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ — соответственно множества ограниченных и вполне непрерывных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, а I — тождественный оператор. Далее относительно оператор-функции (1) предполагаем, что $L_0, \ldots, L_n \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, функция $S(\lambda)$ принимает значение в $[\mathfrak{H}]$, аналитически зависит от $\lambda \in \Phi_\zeta = \{\lambda : |\lambda| > \zeta\}$, непрерывна по норме при $\lambda \in \overline{\Phi}_\zeta = \{\lambda : |\lambda| \geqslant \zeta\}$ и $S(\infty) = 0$. Кроме того, существует такая последовательность чисел $\lambda_s \in \Phi_\zeta$ и $\lambda_s \to \infty$, что операторы $L(\lambda_s)$ ограничено обратимы.

К изучению оператор-функции (1) сводится ряд задач математической физики и теории дифференциальных уравнений, содержащих спектральный параметр в граничном условии (библиографию см. в [3, с. 108; 4]).

Для формулировки решаемой здесь задачи введем в удобном виде восходящие к М. В. Келдышу [1, 2] понятия и определения. При этом предполагается, что $L(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция, зависящая от λ из области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со значениями в $[\mathfrak{H}]$.

Элементы $x_0, \ldots, x_p$ из $\mathfrak{H}$ называются ц е п о ч к о й к о р н е в ы х в е к т о р о в, отвечающей характеристическому числу $\mu \in \Omega$ оператор-функции $L(\lambda)$, если с о б с т в е н н ы й в е к т о р $x_0 \neq 0$ и $\left\| L(\lambda) \sum_{h=0}^{p} (\lambda - \mu)^h x_h \right\| = O(|\lambda - \mu|^{p+1})$ в окрестности точки μ; элемент x_h — п р и с о е д и н е н н ы й (или к о р н е в о й) вектор порядка h, а число $p + 1$ — длина цепочки.

Очевидно, что вектор $x_0 \in \mathfrak{Z}(L(\mu))$, где через $\mathfrak{Z}(A)$ обозначено ядро оператора A. Каждому собственному вектору x_0 оператор-функции $L(\lambda)$ поставим в соответствие число d, равное максимальному порядку присоединенных к x_0 элементов. Число $d + 1$ называется к р а т н о с т ь ю с о б с т в е н н о г о в е к т о р а x_0. Пусть все собственные векторы оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающие характеристическому числу μ, имеют конечные кратности, ограниченные в совокупности одним и тем же числом, а $\dim \mathfrak{Z}(L(\mu)) < \infty$. Тогда определена к а н о н и ч е с к а я с и с т е м а к о р н е в ы х в е к т о р о в, отвечающая характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$, т. е. система элементов $x_{0,j}, \ldots, x_{d_j,j}$, $j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu))$, обладающая следующими свойствами: 1) вектор $x_{0,j}$ собственный, а $x_{1,j}, \ldots, x_{d_j,j}$ — присоединенные к нему векторы, отвечающие характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$; 2) кратность собственного вектора $x_{0,1}$ достигает возможного максимума $d_1 + 1$ среди собственных векторов, отвечающих характеристическому числу μ; 3) кратность собственного вектора $x_{0,j}$ при $j > 1$ достигает возможного максимума $d_j + 1$ среди всех собственных векторов, не выражающихся линейно через элементы $x_{0,1}, \ldots, x_{0,j-1}$.

Чтобы сформулировать достаточное условие существования канонической системы, дадим определения. С п е к т р о м $\sigma(L(\lambda))$ о п е р а т о р - ф у н к ц и и $L(\lambda)$ называется множество тех значений $\mu \in \Omega$, при которых оператор $L(\mu)$ не имеет ограниченного обратного. Число $\mu \in \sigma(L(\lambda))$ называется д и с к р е т н о й т о ч к о й с п е к т р а $L(\lambda)$, если оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в некоторой проколотой окрестности точки μ и в этой окрестности справедливо представление $L^{-1}(\lambda) = \sum_{h=0}^{p} (\lambda - \mu)^{-h-1} R_{p-h} + W(\lambda)$ с аналитической в точке μ оператор-функцией $W(\lambda)$ и конечномерными операторами R_h при $h = 0, \ldots, p$, причем $R_0 \neq 0$.

Из результатов М. В. Келдыша [2] (см. также лемму 11 в [5]) вытекает, что дискретная точка спектра является характеристическим числом и для него существует каноническая система.

Через $\mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$ обозначим множество аналитических в Ω оператор-функций со значениями в $[\mathfrak{H}]$, спектр которых состоит из дискретных точек. Достаточное условие принадлежности $L(\lambda)$ множеству $\mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$ дает следующее утверждение, принадлежащее М. В. Келдышу [2, с. 17, 18; 3, лемма 5.5].

Лемма 1. *Пусть на связном открытом множестве Ω задана оператор-функция $L(\lambda) = B(\lambda) + A(\lambda)$, где $B(\lambda)$ и $A(\lambda)$ — аналитические от $\lambda \in \Omega$ функции со значениями в $[\mathfrak{H}]$ и $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ соответственно, причем оператор $B(\lambda)$ обратим, когда $\lambda \in \Omega$. Если для некоторого $\lambda_0 \in \Omega$ оператор $L(\lambda_0)$ обратим, то $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$.*

Пусть оператор-функция $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$. Тогда в области Ω имеется не более счетного числа дискретных точек спектра μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, оператор-функции $L(\lambda)$ и для каждого характеристического числа μ_k существует каноническая система корневых векторов

$$x_{0,j,k}, \ldots, x_{d_j,j,k}, \qquad j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k)). \tag{2}$$

Множество мультииндексов (h, j, k), нумерующих векторы $x_{h,j,k}$, входящие в канонические системы (2), обозначим символом $\Lambda(L(\lambda); \Omega)$, причем индекс $h = 0, \ldots, d_j$, индекс $j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k))$, а $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть кроме оператор-функции $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$ в области Ω задано m аналитических функций $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$ со значениями в $[\mathfrak{H}]$. По каждой цепочке корневых векторов (2), отвечающей характеристическому числу μ_k оператор-функции $L(\lambda)$, построим векторы

$$x_{h,j,k}(Q_l(\lambda)) = \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \frac{d^s [Q_l(\lambda) x_{h-s,j,k}]}{d\lambda^s}\bigg|_{\lambda=\mu_k}, \tag{3}$$

по которым в пространстве $\mathfrak{H}^m$ (т. е. в прямой сумме m экземпляров пространства $\mathfrak{H}$) образуем элементы

$$x_{h,j,k}(Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)) = \{x_{h,j,k}(Q_1(\lambda)), \ldots, x_{h,j,k}(Q_m(\lambda))\}. \tag{4}$$

Цепочки векторов $x_{0,j,k}(Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)), \ldots, x_{d_j,j,k}(Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda))$ называются *производными по* $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$ *цепочками*. В случае, когда $Q_l(\lambda) = \lambda^{l-1} I$, эти цепочки называются *производными по Келдышу цепочками*. Отметим, что векторы (4), входящие в производные по $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$ цепочки определены для тех же значений мультииндекса (h, j, k), что и векторы, входящие в канонические системы корневых векторов (2). Через $\mathfrak{P}(L(\lambda); Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda); \Omega)$ обозначим линейную оболочку векторов (4) при $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda); \Omega)$. В силу определения канонических систем корневых векторов данные здесь и в работе [3, с. 85] определения $\mathfrak{P}(L(\lambda); Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda); \Omega)$ совпадают.

По операторам $A_{j,l} \in [\mathfrak{H}]$ построим действующий в пространстве $\mathfrak{H}^n$ оператор $\{A_{j,l}\}_{j,l=1}^n$, причем здесь и далее в указании пределов изменения индексов первый индекс означает номер строки, а второй — столбца. По операторам $A_j \in [\mathfrak{H}]$ введем оператор $\operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_n\} \equiv \{\delta_{j,l} A_j\}_{j,l=1}^n$, где $\delta_{j,l}$ — символ Кронекера. Если $A_j = A$, то $\operatorname{diag}^n A \equiv \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Вернемся теперь к рассмотрению оператор-функции (1). В силу обратимости оператора $I + S(\lambda)$ при достаточно больших по модулю λ из леммы 1 следует существование такого числа $\rho \geqslant \zeta$, что оператор-функция $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Phi_\rho; [\mathfrak{H}])$. Поэтому для оператор-функции (1), рассмотренной в области Φ_ρ, справедливы приведенные построения. Сформулируем основной результат работы, считая оператор $\tilde{L} = \{L_{j+l-1}\}_{j,l=1}^n$, где $L_1, \ldots, L_n$ из равенства (1) и $L_s = 0$ при $s > n$.

Теорема 1. *Для оператор-функции* (1) *существует такое число $\rho > \zeta$, что система векторов $\tilde{L} x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1} I)$ при $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda); \Phi_\rho)$ минимальна в пространстве $\mathfrak{H}^n$.*

Оговоримся, что в этой теореме и далее пустую систему векторов будем считать минимальной.

Доказательство теоремы 1 использует следующее утверждение о факторизации оператор-функции (1) (ср. с теоремой 3.1 из [6]).

Теорема 2. *Для оператор-функции* (1) *существует такое число* $\eta \geqslant \zeta$, *для которого в области* Φ_η *оператор-функция* $L(\lambda)$ *представима в виде*

$$L(\lambda) = D(\lambda) F(\lambda), \tag{5}$$

причем факторы $D(\lambda)$ *и* $F(\lambda)$ *обладают следующими свойствами:*

1. *В кольце* $0 < |\lambda| \leqslant \eta$ *оператор-функция* $F(\lambda)$ *обратима,*

$$F(\lambda) = I + \sum_{s=0}^{n} \lambda^s F_s + \sum_{s=1}^{q} \frac{K_{q-s}}{\lambda^s}, \tag{6}$$

где $K_0, \ldots, K_{q-1}$ — *конечномерные операторы, операторы*

$$F_s = L_s + \sum_{r=s+1}^{n} D_{r-s} L_r, \qquad s = 0, \ldots, n-1, \tag{7}$$

при некоторых $D_1, \ldots, D_n \in [\mathfrak{H}]$, *а оператор* $F_n = L_n$.

2. $D(\lambda)$ — *аналитическая в области* Φ_η *и непрерывная по норме в* $\overline{\Phi}_\eta$ *оператор-функция, причем оператор* $D(\lambda)$ *ограниченно обратим при* $\lambda \in \overline{\Phi}_\eta$ *и* $D(\infty) = I$.

Доказательство. Поскольку $S(\infty) = 0$, то найдется такое число $\zeta_1 > \zeta$, что оператор-функция $I + S(\lambda)$ ограниченно обратима при $|\lambda| \geqslant \zeta_1$, а в силу ее аналитичности $[I + S(\lambda)]^{-1} = I + \sum_{r=-\infty}^{-1} \lambda^r V_r$ и ряд сходится по операторной норме, когда $|\lambda| > \zeta_1$. Рассмотрев в области Φ_{ζ_1} вместо оператор-функции $L(\lambda)$ оператор-функцию $[I + S(\lambda)]^{-1} L(\lambda)$, доказательство теоремы 2 сведем к факторизации оператор-функции (1), но при дополнительном требовании $S(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ при $\lambda \in \overline{\Phi}_\zeta$. В этом предположении и проведем доказательство, заметив лишь, что после указанного сведения оператор L_n не изменится, а операторные коэффициенты L_s у оператор-функции (1) будут иметь вид (7).

На основании леммы 1 найдется такое число $\eta \geqslant \zeta$, что на окружности $\{\lambda : |\lambda| = \eta\}$ оператор-функция $L(\lambda)$ обратима, а так как по предположению операторы $L_0, \ldots, L_n \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ и значения $S(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, то оператор-функция $L(\eta\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о факторизации из работы [7], на основании которой имеем

$$L(\lambda) = [I + T_-(\lambda)] P(\lambda) [I + T_+(\lambda)], \tag{8}$$

где факторы обладают следующими свойствами.

1. Оператор-функции $T_+(\lambda)$ и $T_-(\lambda)$ аналитичны соответственно при $|\lambda| < \eta$ и $|\lambda| > \eta$, непрерывны вплоть до границы и принимают свои значения в $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, причем $T_-(\lambda)$ ограничена при $|\lambda| \geqslant \eta$.

2. Оператор-функции $I + T_+(\lambda)$ и $I + T_-(\lambda)$ обратимы соответственно при $|\lambda| \leqslant \eta$ и $|\lambda| \geqslant \eta$, причем норма $[I + T_-(\lambda)]^{-1}$ равномерно ограничена при $|\lambda| \geqslant \eta$.

3. $P(\lambda) = \sum_{s=-q}^{\varkappa} (\lambda/\eta)^s P_s$, где q и $\varkappa$ — неотрицательные числа, а P_s — такие ограниченные проекторы, что P_s — конечномерны, когда $s \neq 0$, а $P_k P_s = \delta_{k,s} P_s$ и $\sum_{s=-q}^{\varkappa} P_s = I$.

В силу свойств 1 и 2 получаем $[I + T_-(\lambda)]^{-1} = I + \sum_{s=-\infty}^{0} \lambda^s Y_s$ при $|\lambda| > \eta$, где $Y_s \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, а $I + Y_0$ — обратимый оператор. Положим

$$D(\lambda) = [I + T_-(\lambda)](I + Y_0), \tag{9}$$

а

$$F(\lambda) = (I + Y_0)^{-1} P(\lambda) [I + T_+(\lambda)] \tag{10}$$

и покажем, что это и есть искомые факторы в равенстве (5). Очевидно, что оператор-функция $D(\lambda)$, заданая равенством (9), удовлетворяет утверждению 2 теоремы 2. Оператор-функция $F(\lambda)$ определена равенством (10) лишь в кольце $0 < |\lambda| \leqslant \eta$, однако на основании тождеств (8) — (10), справедливых при $|\lambda| = \eta$, она допускает аналитическое продолжение в область Φ_η посредством формулы

$$F(\lambda) = D^{-1}(\lambda) L(\lambda). \tag{11}$$

Тем самым установлена аналитичность $F(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.

Обратимость $F(\lambda)$ в кольце $0 < |\lambda| \leqslant \eta$ вытекает из представления (10), свойства 2 факторизации (8) и тождества $P^{-1}(\lambda) = \sum\limits_{s=-q}^{\varkappa} (\lambda/\eta)^{-s} P_s$, следующего из свойства 3. Из представления (10) и вида фактора $P(\lambda)$ заключаем, что в нуле оператор-функция $F(\lambda)$ имеет полюс порядка q, а так как операторные коэффициенты главной части разложения в ряд Лорана в окрестности нуля оператор-функции $P(\lambda)$ — конечномерные операторы, то и операторные коэффициенты главной части разложения $F(\lambda)$ также конечномерны. Отсюда и из аналитичности оператор-функции $F(\lambda)$ при всех $\lambda \neq 0$ получаем представление

$$F(\lambda) = I + \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s F_s + \sum_{s=1}^{q} \frac{K_{q-s}}{\lambda^s}, \tag{12}$$

в котором K_s — конечномерные операторы. Из доказанного утверждения 2 теоремы 2 вытекает разложение $D^{-1}(\lambda) = I + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \lambda^{-s} D_s$ при $|\lambda| > \eta$, подставляя которое в представление (11), задающее $F(\lambda)$ при $|\lambda| \geqslant \eta$, и учитывая вид (1) оператор-функции $L(\lambda)$, заключаем, что в равенстве (12) операторы $F_s = 0$ при $s > n$, а при $s = 0, \ldots, n$ операторы F_s имеют вид (7). Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Далее понадобится лемма, сводящая доказательство минимальности производных цепочек оператор-функции (1) к минимальности производных цепочек оператор-функции (6).

Л е м м а 2. *Если $D(\lambda)$ и $F(\lambda)$ — аналитические в области Ω оператор-функции со значениями в $[\mathfrak{H}]$, а оператор $D(\lambda)$ обратим при $\lambda \in \Omega$, то канонические системы корневых векторов у оператор-функций $D(\lambda) F(\lambda)$ и $F(\lambda)$ совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из определения канонических систем и леммы 2 работы [8].

Изучим теперь вопрос о минимальности производных цепочек оператор-функции (6). Для этого по операторам, входящим в оператор-функцию (6), определим

$$F_l(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-l} \lambda^s F_{l+s}, \qquad l = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

и

$$K_l(\lambda) = \lambda^{-l} \sum_{s=0}^{l-1} \lambda^s K_s, \qquad l = 1, \ldots, q. \tag{14}$$

Л е м м а 3. *Если оператор-функция $F(\lambda)$ задана равенством* (6) *и $F(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{C} \setminus \{0\}; [\mathfrak{H}])$, то построенные по каноническим системам корневых векторов $x_{0,j,k}, \ldots, x_{d_j,j,k}$, отвечающим характеристическим числам μ_k оператор-функции $F(\lambda)$, элементы $x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n+q-1} I)$ при $(h, j, k) \in$*

$\in \Lambda(F(\lambda);\ \mathbb{C}\setminus\{0\})$ *минимальны в пространстве* $\mathfrak{H}^{n+q}$. *При этом существуют такие канонические системы корневых векторов* $y_{0,j,k}, \ldots, y_{d_j,j,k}$, *отвечающие характеристическим числам* $\bar{\mu}_k$ *оператор-функции* $F^*(\bar{\lambda})$, *что построенные по ним элементы**

$$\tilde{y}_{h,j,k} = y_{h,j,k}(-K_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, -K_q^*(\bar{\lambda}),\ F_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, F_n^*(\bar{\lambda})) \tag{15}$$

с мультииндексами $(h, j, k) \in \Lambda(F^*(\bar{\lambda});\ \mathbb{C}\setminus\{0\}) (= \Lambda(F(\lambda);\ \mathbb{C}\setminus\{0\}))$ *удовлетворяют соотношениям биортогональности*

$$(x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n+q-1}I),\ \tilde{y}_{d_s-m,s,p}) = \delta_{h,m}\delta_{j,s}\delta_{k,p}, \tag{16}$$

в которых через $(\cdot,\cdot)$ *обозначено скалярное произведение в пространстве* $\mathfrak{H}^{n+q}$.

Доказательство. Введем полиномиальную оператор-функцию $A(\lambda) = \lambda^q F(\lambda)$ и положим

$$A_l(\lambda) = \lambda^{-l}\left(\lambda^q F(\lambda) - \sum_{s=0}^{l-1} \lambda^s K_s\right), \qquad l = 1, \ldots, q \tag{17}$$

а $A_l(\lambda) = F_{l-q}(\lambda)$ при $l = q+1, \ldots, n+q$. На основании леммы 2 у оператор-функций $A(\lambda)$ и $F(\lambda)$, а также у оператор-функций $A^*(\bar{\lambda})$ и $F^*(\bar{\lambda})$ канонические системы корневых векторов, отвечающие не равным нулю характеристическим числам, совпадают и, следовательно, совпадают построенные по ним производные цепочки. Исходя из соотношений биортогональности М. В. Келдыша [9, с. 857—859] существуют такие канонические системы корневых векторов $y_{0,j,k}, \ldots, y_{d_j,j,k}$, отвечающие характеристическим числам $\bar{\mu}_k$ оператор-функции $A^*(\bar{\lambda})$ (а значит, и $F^*(\bar{\lambda})$), для которых элементы

$$\tilde{y}_{h,j,k} = y_{h,j,k}(A_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, A_{n+q}^*(\bar{\lambda})) \tag{18}$$

образуют сопряженную систему к системе векторов $x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n+q-1}I)$, причем соотношения биортогональности имеют вид (16). Поэтому для доказательства леммы 3 достаточно установить, что элементы (15) и (18) совпадают или, что то же самое, установить тождества $y_{h,j,k}(A_l^*(\bar{\lambda})) = y_{h,j,k}(-K_l^*(\lambda))$ при $l = 1, \ldots, q$ и $y_{h,j,k}(A_l^*(\bar{\lambda})) = y_{h,j,k}(F_{l-q}^*(\lambda))$ при $l = q+1, \ldots, n+q$, в которых векторы строятся по векторам $y_{h,jk}$ и характеристическим числам $\bar{\mu}_k$ по правилу (3). Тождества $y_{h,j,k}(A_l^*(\bar{\lambda})) = y_{h,j,k}(F_{l-q}^*(\bar{\lambda}))$ вытекают из определения $A_l(\lambda) = F_{l-q}(\lambda)$ при $l = q+1, \ldots, n+q$. Докажем равенства $y_{h,j,k}(A_l^*(\bar{\lambda})) = y_{h,j,k}(-K_l^*(\bar{\lambda}))$. Так как на основании леммы 2 элементы $y_{0,j,k}, \ldots, y_{d_j,j,k}$ являются каноническими системами корневых векторов как оператор-функции $F^*(\bar{\lambda})$, так и оператор-функции $\lambda^{q-l}F^*(\bar{\lambda})$, отвечающие одному и тому же характеристическому числу μ_h, то

$$\sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \left.\frac{d^s[\lambda^{q-l}F^*(\bar{\lambda})\,y_{h-s,j,k}]}{d\lambda^s}\right|_{\lambda=\bar{\mu}_k} = 0,$$

откуда, из вида (14) и (17) оператор-функций $K_l(\lambda)$ и $A_l(\lambda)$ и из правила

---

* Тем самым векторы (15) являются производными по $-K_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, -K_q^*(\bar{\lambda})$, $F_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, F_n^*(\bar{\lambda})$ цепочками, т. е. строятся по цепочкам $y_{0,j,k}, \ldots, y_{d_j,j,k}$ и характеристическим числам $\bar{\mu}_k$ по правилам (3) и (4).

(3) образования векторов $x_{h,j,k}(Q_l(\lambda))$ получаем требуемое тождество $y_{h,j,k}(A_l^*(\bar{\lambda})) = y_{h,j,k}(-K_l^*(\bar{\lambda}))$. Тем самым лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 2 и леммы 2 следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать минимальность системы элементов $\tilde{L}x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1}I)$, построенных по каноническим системам корневых векторов оператор-функции $F(\lambda)$, заданной равенством (6). Оператор-функция $F(\lambda)$ обратима в кольце $0 < |\lambda| \leqslant \eta$, а операторы F_s и $K_s \in \mathfrak{S}_\infty\ [\mathfrak{H}]$, поэтому $F(\lambda)$ удовлетворяет требованиям леммы 1, а значит, и требованиям леммы 3. Из леммы 3 получаем, что сопряженная система к системе $x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n+q-1}I)$ при $(h, j, k) \in \Lambda(F(\lambda); \Phi_\eta)$ имеет вид (15). Из этого факта выведем утверждение теоремы 1. Для этого изучим сопряженную систему (15). По операторам D_s и F_s, входящим в равенства (7), построим действующие в пространстве $\mathfrak{H}^n$ операторы $\tilde{D} = \{D_{l-j}\}_{j,l=1}^n$ и $\tilde{F} = \{F_{j+l-1}\}_{j,l=1}^n$, причем в этих определениях считаем, что $D_0 = I$, $D_s = 0$ при $s < 0$ и $F_s = 0$ при $s > n$. Из (7) и определения оператора $\tilde{L} = \{L_{j+l-1}\}_{j,l=1}^n$ имеем $\tilde{F} = \tilde{D}\tilde{L}$. Воспользовавшись правилом (3) построения векторов $x_{h,j,k}(Q_l(\lambda))$ и видом (13) оператор-функции $F_l(\lambda)$ получим $y_{h,j,k}(F_l^*(\bar{\lambda})) = \sum\limits_{s=1}^{n-l+1} F_{l+s-1}^* y_{h,j,k}(\lambda^{s-1}I)$, откуда вытекает тождество $y_{h,j,k}(F_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, F_n^*(\bar{\lambda})) = \tilde{F}^* y_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1}I)$ с оператором $\tilde{F}^* = \tilde{L}^*\tilde{D}^*$. Пусть P — такой конечномерный ортопроектор, для которого $K_s P = K_s$ при $s = 0, \ldots, q-1$, где K_s — конечномерные операторы, входящие в равенство (6). Отсюда и из формул (3) и (14) заключаем, что $y_{h,j,k}(-K_l^*(\bar{\lambda})) = P y_{h,j,k}(-K_l^*(\bar{\lambda}))$ для $l = 1, \ldots, q$. Тем самым показано, что сопряженная система элементов (15) имеет вид

$$\hat{y}_{h,j,k} = (\mathrm{diag}^q P)\, y_{h,j,k}(-K_1^*(\bar{\lambda}), \ldots, -K_q^*(\bar{\lambda})) \oplus$$

$$\oplus \tilde{L}^*\tilde{D}^* y_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1}I). \tag{19}$$

Здесь и далее запись $f \oplus g$ означает вектор из прямой суммы двух гильбертовых пространств, которым соответственно принадлежат векторы f и g (в данном случае пространствам $\mathfrak{H}^q$ и $\mathfrak{H}^n$). Учитывая вид (19) сопряженной системы к системе векторов $x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n+q-1}I)$, получаем минимальность системы векторов

$$(\mathrm{diag}^q P)\, x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{q-1}I) \oplus \tilde{L}x_{h,j,k}(\lambda^q I, \lambda^{q+1}I, \ldots, \lambda^{n+q-1}I) \tag{20}$$

при $(h, j, k) \in \Lambda(F(\lambda); \Phi_\eta)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1 = [\mathfrak{R}(P)]^q \oplus \mathfrak{H}^n$, т. е. в пространстве, равном прямой сумме q экземпляров области значений $\mathfrak{R}(P)$ оператора P и n экземпляров пространства $\mathfrak{H}$. Обозначим через Q оператор ортогонального проектирования в пространстве $\mathfrak{H}_1$ на его подпространство $\mathfrak{H}^n$, имеющее в $\mathfrak{H}_1$ конечную коразмерность. Система векторов (20) и оператор Q удовлетворяют условиям леммы 1 работы [10], поэтому найдется такое конечное множество Δ мультииндексов (h, j, k), для которого элементы

$$\tilde{L}x_{h,j,k}(\lambda^q I, \lambda^{q+1}I, \ldots, \lambda^{n+q-1}I) \tag{21}$$

при $(h, j, k) \in \Lambda(F(\lambda); \Phi_\eta) \setminus \Delta$ минимальны в пространстве $\mathfrak{H}^n$. Выбрав теперь $\rho \geqslant \eta$ таким, чтобы множество $\Lambda(F(\lambda); \Phi_\rho)$ не содержало конечное множество Δ, получим минимальность векторов (21) при мультииндексе

$(h, j, k) \in \Lambda (F(\lambda); \Phi_\rho)$. Но из определений (3) и (4) вытекает тождество

$$\tilde{L}x_{h,j,k}(\lambda^q I, \lambda^{q+1} I, \ldots, \lambda^{n+q-1} I) =$$
$$= \sum_{r=0}^{h} \left(\frac{1}{r!} \frac{d^r(\lambda^q)}{d\lambda^r} \bigg|_{\lambda=\mu_k} \right) \tilde{L}x_{h-r,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1} I),$$

откуда и из минимальности векторов (21) при $(h, j, k) \in \Lambda (F(\lambda); \Phi_\rho)$ следует минимальность векторов $\tilde{L}x_{h,j,k}(I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1} I)$ при тех же значениях мультииндекса (см. лемму 13 из [5]). Тем самым теорема 1 полностью доказана.

В некоторых случаях можно утверждать, что число ρ, фигурирующее в в теореме 1, равно ζ.

Теорема 3. *Пусть оператор-функция* (1) *удовлетворяет еще и условиям: найдется такой оператор* $U \in [\mathfrak{H}]$, *что* $\mathrm{Re}\,(UL(\lambda)f, f) > 0$ *при* $|\lambda| = \zeta$ *и ненулевых* $f \in \mathfrak{H}$, *а оператор* $I + S(\lambda)$ *обратим при* $|\lambda| \geqslant \zeta$. *Тогда утверждение теоремы 1 справедливо при* $\rho = \zeta$.

Доказательство теоремы 3 полностью повторяет доказательство теоремы 1, лишь вместо теоремы 2 используется следующее утверждение о факторизации оператор-функции (1).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда утверждение теоремы 2 справедливо при* $\eta = \zeta$, *причем в определении* (6) *оператор-функции* $F(\lambda)$ *операторы* $K_0 = \ldots = K_{q-1} = 0$.

Доказательство. Операторы $L_0, \ldots, L_n \in \mathfrak{S}_\infty [\mathfrak{H}]$, а оператор $I + S(\lambda)$ обратим при $\lambda \in \overline{\Phi}_\zeta$, поэтому

$$[I + S(\lambda)]^{-1} L(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_\infty [\mathfrak{H}], \qquad \lambda \in \overline{\Phi}_\zeta \tag{22}$$

Отсюда и из условия $\mathrm{Re}\,(UL(\lambda)f, f) > 0$ при $f \neq 0$ следует обратимость оператора $[I + S(\lambda)]^{-1} L(\lambda)$, а значит, и оператора $L(\lambda)$, при $|\lambda| = \zeta$. Учтя теперь непрерывность $L(\lambda)$ при $\lambda \in \overline{\Phi}_\zeta$, получаем обратимость оператора $L(\lambda)$ в замкнутом кольце $\zeta \leqslant |\lambda| \leqslant \eta$ при некотором $\eta > \zeta$. Из включения (22), обратимости оператора $L(\lambda)$ при $|\lambda| = \eta$ и леммы 1 видно, что в области Φ_η существует указанная в теореме 2 факторизация, причем в силу утверждения 1 теоремы 2 фактор $D(\lambda)$ продолжается и в кольцо $\zeta \leqslant |\lambda| \leqslant \eta$ посредством равенства $D(\lambda) = L(\lambda) F^{-1}(\lambda)$ и является в этом кольце обратимым оператором. Тем самым для доказательства теоремы 1 осталось установить равенство нулю операторов K_s из (6), а для этого (см. доказательство теоремы 2) достаточно показать, что в оператор-функции $P(\lambda)$ из факторизации (8) число $q = 0$ (см. свойство 3 факторизации (8)). Пусть $q \neq 0$. Тогда найдется неравный нулю вектор $f \in \mathfrak{R}(P_{-q})$, т. е. $f = P_{-q}f$. Положим функцию $f(\lambda) = [I + T_+(\lambda)]^{-1} f$, которая на основании свойства 2 факторизации (8) является аналитической и не равной нулю в области $\{\lambda : |\lambda| < \eta\}$ вектор-функцией. Для нее из условия $\mathrm{Re}\,(UL(\lambda)f, f) > 0$ следует

$$\int_0^{2\pi} (UL(\zeta e^{i\theta}) f(\zeta e^{i\theta}), f(\zeta e^{i\theta}))\, d\theta \neq 0. \tag{23}$$

Воспользовавшись равенством (10) и свойством 3 факторизации (8), имеем $f(\lambda) = F^{-1}(\lambda)(I + Y_0)^{-1} P(\lambda) f = (\eta/\lambda)^q F^{-1}(\lambda)(I + Y_0)^{-1} f$, откуда $L(\lambda) \times f(\lambda) = (\eta/\lambda)^q D(\lambda)(I + Y_0)^{-1} f$, т. е. вектор-функция $L(\lambda) f(\lambda)$ аналитична в области Φ_ζ, непрерывна вплоть до границы $\partial\Phi_\zeta$ и допускает оценку $\| L(\lambda) f(\lambda) \| \leqslant c(1 + |\lambda|)^{-q}$. Вектор-функция $f(\zeta^2/\lambda)$ аналитична и равномерно ограничена в области $\Phi_{\zeta^2/\eta} (\subseteq \Phi_\zeta)$, поэтому $\int_{\partial\Phi_\zeta} (i\lambda)^{-1} (UL(\lambda) f(\lambda), f(\zeta^2/\overline{\lambda}))\, d\lambda = 0$. Но этот интеграл совпадает с интегралом (23). Полученное противоречие показывает, что число $q=0$, а значит, справедливо утверждение теоремы 4.

Замечание 1. Пусть оператор-функция (1) удовлетворяет условию: найдется такой оператор U, что $\mathrm{Re}\,(L(\lambda)\,Uf, f)>0$ при $|\lambda|=\zeta$ и ненулевых $f\in\mathfrak{H}$, а оператор $I+S(\lambda)$ обратим при $|\lambda|\geqslant\zeta$. Тогда теорема 2 допускает следующее уточнение: у оператор-функции $F^{-1}(\lambda)$ точка $\lambda=0$ является устранимой особой точкой. Действительно, рассмотрев вместо факторизации (8) вытекающую из нее факторизацию $L^*(\bar\lambda)=[I+T_+^*(\bar\lambda)]\,P^*(\bar\lambda)\,[I+T_-^*(\bar\lambda)]$ и повторив доказательство теоремы 4, получим, что в свойстве 3 факторизации (8) число $\varkappa=0$, откуда и следует сформулированное уточнение. Тем самым когда в условиях теоремы 4 оператор U обратим, то у оператор-функции $F(\lambda)$, заданной равенством (6), операторы $K_0=\ldots=K_{q-1}=0$, а $F(\lambda)$ обратима при $|\lambda|\leqslant\eta$.

Замечание 2. Из установленной в теоремах 1 и 3 минимальности векторов $\tilde{L}x_{h,j,k}(I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I)$ следует минимальность векторов $x_{h,j,k}(I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I)$ при тех же значениях мультииндекса. Если, кроме того, найдутся такие операторы $H_1,\ldots,H_n$ и $T_1,\ldots,T_n$, что у оператор-функции (1) коэффициенты $L_s=T_sH_s\ldots H_1$ при $s=1,\ldots,n$, то из теорем 1 и 3 вытекает минимальность в пространстве $\mathfrak{H}^n$ векторов $\mathrm{diag}\{H_1, H_2, H_1,\ldots,H_nH_{n-1}\ldots H_1\}\,x_{h,j,k}(I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I)$ для тех же значений мультииндекса. Это утверждение следует из представления $\tilde{L}=\tilde{T}\,\mathrm{diag}\{H_1, H_2H_1,\ldots,H_nH_{n-1}\ldots H_1\}$, в котором $\tilde{T}$ — ограниченный оператор, действующий в пространстве $\mathfrak{H}^n$.

Обозначив через $\omega(A)$ числовой радиус оператора A, из теорем 1 и 3 выведем утверждение.

Следствие. *Пусть оператор-функция* $L(\lambda)=I-\lambda^nA-\lambda^{-p}B$, *оператор* $A\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, *а* $B\in[\mathfrak{H}]$, *и существует такая последовательность чисел* $\lambda_s\to\infty$, *что операторы* $L(\lambda_s)$ *ограниченно обратимы. Тогда найдется такое число* $\rho>0$, *для которого система векторов* $(\mathrm{diag}^n A)\,x_{h,j,k}(I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I)$ *при* $(h,j,k)\in\Lambda(L(\lambda);\Phi_\rho)$ *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}^n$. *Если, кроме того,* $(n+p)^{n+p}[\omega(A)]^p[\omega(B)]^n<n^np^p$, *то эта система векторов минимальна при любом* $\rho\geqslant n^{-1/p}[(n+p)\,\omega(B)]^{1/p}$.

Доказательство первого утверждения немедленно вытекает из теоремы 1 и замечания 2. Доказательство второго утверждения достаточно провести, считая $\rho=n^{-1/p}[(n+p)\,\omega(B)]^{1/p}$ и оператор $A\neq0$ (если $A=0$, то в области Φ_ρ нет характеристических чисел $L(\lambda)$). Для элементов f с $\|f\|=1$ и $|\lambda|=\rho<p^{1/n}[(n+p)\,\omega(A)]^{-1/n}$ справедливы неравенства $|\lambda^{-p}(Bf,f)|\leqslant n\,(n+p)^{-1}$ и $|\lambda^n(Af,f)|<p\,(n+p)^{-1}$, поэтому оператор $I-\lambda^{-p}B$ обратим, когда $|\lambda|\geqslant\rho$, и $\mathrm{Re}\,(L(\lambda)f,f)>0$ при $|\lambda|=\rho$. Тем самым оператор-функция $L(\lambda)$ удовлетворяет требованиям теоремы 3, из которой и замечания 2 выводим второе утверждение следствия.

Замечание 3. В теореме 1 и в следствии требование о существовании последовательности чисел $\lambda_s\to\infty$, для которой операторы $L(\lambda_s)$ обратимы, налагалось лишь для того, чтобы установить включение $L(\lambda)\in\mathfrak{F}_0(\Phi_\rho;[\mathfrak{H}])$ для некоторого $\rho\geqslant\zeta$, из которого, в свою очередь, следует выполнение указанного требования и которое, вообще говоря, является необходимым при исследовании минимальности. Тем не менее в ряде случаев требование о существовании нужной последовательности λ_s можно ослабить. Например, если в теореме 1 потребовать, чтобы значения оператор-функции $S(\lambda)\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, а в следствии, чтобы $B\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, то для справедливости этих утверждений достаточно предположить обратимость оператора $L(\lambda_0)$ лишь в одной точке (см. лемму 1). Последнее требование в общем случае снять нельзя даже в случае двумерного пространства $\mathfrak{H}$, что показывает пример матрицы функции $L(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda^{-1}\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$. Более важное замечание относится к теореме 3 и второму утверждению следствия, которые справедливы без предположения о существовании нужной последовательности λ_s. Действительно, при доказательстве теоремы 4 отмечалось, что оператор $L(\lambda)$ обратим в некотором замкнутом кольце $\zeta \leqslant |\lambda| \leqslant \eta$, а по условию теоремы 3 оператор $I + S(\lambda)$ обратим при $\lambda \in \bar{\Phi}_\zeta$. Отсюда и из леммы 1 следует необходимое включение $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Phi_\zeta; [\mathfrak{H}])$, а так же и то, что это включение справедливо, если требование обратимости $I + S(\lambda)$ заменить условием $S(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ при $\lambda \in \bar{\Phi}_\zeta$. Отметим, что все уточнения теорем 1 и 3 в равной мере относятся и к теоремам 2 и 4 соответственно.

Приведем одно приложение теорем 1 и 3, относящееся к исследованию базисов, состоящих из производных по Келдышу цепочек.

Систему подпространств $\{\mathfrak{N}_r\}_{r=1}^\infty$, принадлежащих гильбертову пространству $\mathfrak{H}$, назовем минимальной, если для любого натурального r_0 пересечения подпространства $\mathfrak{N}_{r_0}$ с замкнутой линейной оболочкой подпространств $\mathfrak{N}_r$ при $r \neq r_0$ равно нулю. Эту же систему подпространств $\{\mathfrak{N}_r\}_{r=1}^\infty$ назовем базисом, эквивалентным ортогональному (или базисом Риса из подпространств), если найдутся такие попарно ортогональные подпространства $\{\mathfrak{O}_r\}_{r=1}^\infty$, замкнутая линейная оболочка которых совпадает с $\mathfrak{H}$, и такой ограниченно обратимый оператор $W \in [\mathfrak{H}]$, что $W\mathfrak{O}_r = \{f : f = Wg,\ g \in \mathfrak{O}_r\} = \mathfrak{N}_r$.

Далее понадобится следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\{\mathfrak{N}_r\}_{r=1}^\infty$ — минимальная система подпространств гильбертового пространства $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{E}_r \subseteq \mathfrak{N}_r$ — такие подпространства, что $\{\mathfrak{E}_r\}_{r=d}^\infty$ при $d \geqslant 1$ образуют базис, эквивалентный ортогональному, для своей замкнутой линейной оболочки, коразмерность которой конечна в $\mathfrak{H}$. Тогда подпространства $\{\mathfrak{N}_r\}_{r=1}^\infty$ образуют базис, эквивалентный ортогональному, для своей замкнутой линейной оболочки.*

Доказательство. Положим подпространства $\mathfrak{E}_r = \{0\}$ при $r < d$, $\mathfrak{L}_r = \mathfrak{N}_r \ominus \mathfrak{E}_r$, а $\mathfrak{P}$ — замкнутая линейная оболочка подпространств $\mathfrak{E}_r$. Любой вектор $g \in \mathfrak{P}$ разлагается в ряд $g = \sum\limits_r g_r$, где $g_r \in \mathfrak{E}_r$. Пусть векторы $f_r \in \mathfrak{L}_r$. Покажем, что равенство $f_1 + \ldots + f_q = g$ возможно лишь, когда $f_1 = \ldots = f_q = g = 0$. Действительно, $f_s - g_s = \sum\limits_{k \leqslant q : k \neq s} (g_k - f_k) + \sum\limits_{k > q} g_k$, значит, вектор $f_s - g_s$ принадлежит подпространству $\mathfrak{N}_s$ и замкнутой линейной оболочке подпространств $\mathfrak{N}_r$ при $r \neq s$, откуда и из минимальности подпространств $\{\mathfrak{N}_r\}_{r=1}^\infty$ следует, что $f_s = g_s$, а так как элемент f_s ортогонален элементу g_s, то $f_s = 0$. Тем самым показано: 1) пересечение линейной оболочки подпространств $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_q$ с подпространством $\mathfrak{P}$ равно нулю, а значит, все подпространства $\mathfrak{L}_r$ конечномерны; 2) конечномерные подпространства $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_q$ образуют прямую сумму. Поэтому для любого натурального числа q размерность подпространства $\mathfrak{L}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{L}_q$ ограничена коразмерностью подпространства $\mathfrak{P}$. Следовательно, лишь конечное число подпространств $\mathfrak{L}_l$ может не равняться нулевому подпространству. Отсюда, из тождеств $\mathfrak{E}_r \oplus \mathfrak{L}_r = \mathfrak{N}_r$ и из того, что пересечение подпространства $\mathfrak{P}$ с прямой суммой не равных нулю конечномерных подпространств $\mathfrak{L}_r$ совпадает с нулевым подпространством, вытекает утверждение леммы 4.

В области Φ_ζ рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = p(\lambda H) + \sum_{k=-[\beta]}^{n-1} \lambda^k T_k H^{k+\beta} + S(\lambda), \tag{24}$$

где число $\beta > 0$, спектр нормального оператора $H \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ расположен на конечном числе лучей, $S(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция при $\lambda \in \Phi_\zeta$ и непрерывная по норме при $\lambda \in \bar{\Phi}_\zeta$, а $p(\lambda)$ — полином степени n с

$p(0)=1$. Пусть $\varkappa_m(H)$ — характеристические числа оператора $(H^*H)^{1/2}$ ($\geqslant 0$), занумерованные в порядке возрастания без учета кратностей. Дополнительно считаем, что $\varkappa_m(H)$, операторы $T_{-[\beta]}, \ldots, T_{n-1}$, число p, равное максимальной кратности корня $p(\lambda)$, и $\|S(\lambda)\|$ связаны одним из следующих условий: а) $\underline{\lim}\, m^{2p-1}\varkappa_m^{-\beta}(H)=0$, $T_k\in[\mathfrak{H}]$, а $|\lambda|^\beta\|S(\lambda)\|<c$ при $\lambda\in\Phi_\zeta$; б) $\underline{\lim}\, m^{2p-1}\varkappa_m^{-\beta}(H)<\infty$, $T_k\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, а $|\lambda|^\beta\|S(\lambda)\|\to 0$ при $\lambda\to\infty$.

По оператору $A\in[\mathfrak{H}]$ с $\mathfrak{Z}(A)=\{0\}$ определим гильбертово пространство $\mathfrak{H}(A)$, равное пополнению пространства $\mathfrak{H}$ по норме $\|x\|_{\mathfrak{H}(A)}=\|Ax\|$. Для нормального оператора H через H^0 обозначим ортопроектор на замыкание области значений H. Пусть $\mathfrak{Z}$ — подпространство пространства $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{Z}^n$ — подпространство пространства $\mathfrak{H}^n$, состоящее из векторов $f=\{f_1,\ldots,f_n\}$ с компонентами $f_l\in\mathfrak{Z}$ при $l=1,\ldots,n$.

В приведенных обозначениях справедливо утверждение.

Теорема 5. *Пусть пространство* $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon=\bigoplus_{l=1}^{n}\mathfrak{H}(H^{l-1+\varepsilon}+I-H^0)$, *где* $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$. *Тогда для оператор-функции* (24) *существует такая последовательность чисел* $\zeta_r\nearrow\infty$ ($r=1,2,\ldots$; а $\zeta_1\geqslant\zeta$), *что конечномерные подпространства*

$$(\operatorname{diag}^n H^0)\,\mathfrak{P}(L(\lambda);I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I;\zeta_r<|\lambda|<\zeta_{r+1}) \tag{25}$$

вместе с подпространством $\mathfrak{Z}^n(H)$ *образуют базис, эквивалентный ортогональному, для своей замкнутой по норме пространства* $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$ *линейной оболочки, коразмерность которой конечна в* $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$. *Если, кроме того, найдется такой обратимый оператор* $U\in[\mathfrak{H}]$, *что* $\operatorname{Re}(UL(\lambda)f,f)>0$ *при* $|\lambda|=\zeta$ *и ненулевых* $f\in\mathfrak{H}$, *а оператор* $I+\sum_{k=-[\beta]}^{-1}\lambda^k T_k H^{k+\beta}+S(\lambda)$ *обратим при* $|\lambda|\geqslant\zeta$, *то существует такая последовательность* $\zeta_r\nearrow\infty$ *с* $\zeta_1=\zeta$, *для которой конечномерные подпространства* (25) *вместе с подпространством* $\mathfrak{Z}^n(H)$ *образуют базис, эквивалентный ортогональному пространства* $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$.

Доказательство. Методами работы [11] получаем следующее утверждение: для оператор-функции (24) существует такая последовательность чисел $\zeta_r\nearrow\infty$ и такая последовательность подпространств $\mathfrak{E}_r\subseteq\mathfrak{P}(L(\lambda);H^0,\lambda H^0,\ldots,\lambda^{n-1}H^0;\zeta_r<|\lambda|<\zeta_{r+1})$, что подпространства $\mathfrak{E}_r$ вместе с подпространством $\mathfrak{Z}^n(H)$ образуют базис, эквивалентный ортогональному для своей замкнутой по норме пространства $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$ линейной оболочки, коразмерность которой конечна в $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$. Из вида (24) оператор-функции $L(\lambda)$, теоремы 1 и замечания 2 следует минимальность в пространстве $\mathfrak{H}^n$ векторов $\operatorname{diag}\{H^\varepsilon,H^{1+\varepsilon},\ldots,H^{n-1+\varepsilon}\}x_{h,j,k}(I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I)$ при мультииндексе $(h,j,k)\in\Lambda(L(\lambda);\Phi_\rho)$ для некоторого $\rho\geqslant\zeta$. Значит, подпространства (25) при $\zeta_r\geqslant\rho$ вместе с подпространством $\mathfrak{Z}^n(H)$ образуют минимальную систему в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$. Отсюда, из существования указанной последовательности подпространств $\mathfrak{E}_r$, на основании леммы 4 вытекает первое утверждение теоремы 5.

Пусть теперь выполнены требования, при которых формулируется второе утверждение теоремы 5. Положив $\zeta_1=\zeta$, из теоремы 3 выводим минимальность последовательности подпространств (24) вместе с подпространством $\mathfrak{Z}^n(H)$ в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$. Отсюда, из первого утверждения теоремы 5 и из леммы 4 следует, что эта система подпространств образует базис, эквивалентный ортогональному, для своей замкнутой по норме пространства $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$ линейной оболочки. Поэтому для доказательства второго утверждения теоремы 5 достаточно показать совпадение замыкания этой линейной оболочки со всем пространством $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$. Установим здесь более общее утверждение: замыкание линейной оболочки многообразия $\mathfrak{P}(L(\lambda);I,\lambda I,\ldots,\lambda^{n-1}I;\Phi_\zeta)$

и подпространства $\mathfrak{Z}^n(H)$ совпадает с $\mathfrak{H}^n$ (а не с $\tilde{\mathfrak{H}}_\varepsilon$). Действительно, в замечании 3 отмечалось, что справедливо включение $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Phi_\zeta; [\mathfrak{H}])$ и оператор $L(\lambda)$ обратим при $|\lambda| = \zeta$, откуда, учитывая обратимость U, имеем $\mathrm{Re}\,(L^{-1}(\lambda)\,U^{-1}f, f) > 0$ при $|\lambda| = \zeta$ и ненулевых $f \in \mathfrak{H}$. Кроме того, из соображений, аналогичных выводу неравенств (5.11) работы [11], для оператор-функции (24) получаем $\| L^{-1}(\lambda) \| \leqslant c\,(1 + |\lambda|)^{\beta/(2p-1)}$ при $|\lambda| = \eta_r$ для некоторой последовательности $\eta_r \nearrow \infty$, причем постоянная c не зависит от r. Из этой оценки, включения $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Phi_\zeta; [\mathfrak{H}])$ и соотношения $\mathrm{Re}\,(L^{-1}(\lambda)\,U^{-1}f, f) > 0$, полностью повторяя доказательство теоремы 2 работы [12], устанавливаем совпадение замкнутой линейной оболочки многообразия $\mathfrak{P}(L(\lambda); I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1}I; \Phi_\zeta)$ и подпространства $\mathfrak{Z}^n(H)$ с пространством $\mathfrak{H}^n$. Тем самым теорема 5 доказана.

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР.— 1951.— **77**, № 1.— С. 11—14.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук.— 1971.— **26**, № 4.— С. 15—41.
3. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Там же.— 1982.— **37**, № 2.— С. 81—145.
4. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1986.— **26**, № 5.— С. 734—755.
5. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов (эквивалетность части корневых векторов).— Киев, 1984.— 52 с.— (Препринт / АН УССР Ин-т математики; 84.32).
6. *Радзиевский Г. В.* Некоторые вопросы спектральной теории оператор-функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1973.— 19 с.
7. *Лайтерер Ю.* О факторизации матриц- и оператор-функций // Сообщ. АН ГССР.— 1977.— **88**, № 3.— 3. 541—544.
8. *Радзиевский Г. В.* Кратная полнота корневых векторов пучка М. В. Келдыша, возмущенного аналитической в круге оператор-функцией // Мат. сб.— 1973.— **91**, № 3.— С. 310—335.
9. *Костюченко А. Г., Радзиевский Г. В.* О суммировании методом Абеля n-кратных разложений // Сиб. мат. журн.— 1974.— **15**, № 5.— М. 855—870.
10. *Радзиевский Г. В.* Об одном способе доказательства минимальности и базисности части корневых векторов // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— **17**, № 1.— С. 24—30.
11. *Радзиевский Г. В.* О базисности производных цепочек // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1975.— **39**, № 5.— С. 1182—1218.
12. *Радзиевский Г. В.* Полнота корневых векторов пучка Келдыша, возмущенного аналитической оператор-функцией $S(\lambda)$ с $S(\infty) = 0$ // Мат. заметки.— 1977.— **21**, № 3.— С. 391—398.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.03.87