УДК 517.5

П. М. Тамразов

Многомерные контурно-телесные теоремы

Доказываются контурно-телесные теоремы для голоморфных функций и отображений $f : G \to \mathbb{C}^k$, заданных в открытых множествах $G \subset \mathbb{C}^n$. Здесь n, k — натуральные, а $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^k$ — комплексные пространства соответствующих размерностей. Основные результаты работы анонсированы в [1] и даны с доказательствами в препринте [2]. История вопроса приведена в [3—7].

1. Основные понятия и утверждения. В формульных определениях используем знаки «$:=$», «$=:$», причем двоеточие пишется со стороны определяемого обозначения.

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех функций $\mu : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для каждой из которых множество $I_\mu := \{x : \mu(x) > 0\}$ связно и сужение функции $\log \mu(x)$ на I_μ вогнуто относительно $\log x$. Пусть $\mathfrak{M}^*$ — класс всех $\mu \in \mathfrak{M}$, для которых I_μ непусто. Для $\mu \in \mathfrak{M}^*$ через x_μ^- и x_μ^+ обозначим соответственно левый и правый концы I_μ. Для $\mu \in \mathfrak{M}^*$ существуют пределы $\mu_0 := \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log \mu(x)}{\log x}$, $\mu_\infty := \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log \mu(x)}{\log x}$, причем

$$-\infty < \mu_0 \leqslant +\infty, \quad -\infty \leqslant \mu_\infty < +\infty, \quad \mu_0 \geqslant \mu_\infty. \tag{1}$$

Если же $\mu \equiv 0$, то в качестве μ_0 и μ_∞ могут быть приняты любые числа, удовлетворяющие условиям (1).

При $\mu_0 < +\infty$ определим целое m_0 условиями $m_0 - 1 < \mu_0 \leqslant m_0$, а при $\mu_\infty > -\infty$ — целое m_∞ условиями $m_\infty \leqslant \mu_\infty < m_\infty + 1$.

Пусть S — некоторое семейство комплексных прямых $P \subset \mathbb{C}^n$. Топологическое пространство $T \supset \mathbb{C}^n$ будем называть *расширением* $\mathbb{C}^n$, *допустимым относительно* S, если для всякой $P \in S$ в $T \setminus \mathbb{C}^n$ существует, притом единственная, точка $\infty(P)$ такая, что $P \cup \{\infty(P)\}$ есть компактное подпространство.

Для всякой прямой $P \in S$ пространство $\tilde{P} := P \cup \{\infty(P)\}$ является одноточечной компактификацией прямой P.

Через S_n обозначим семейство всех комплексных прямых в $\mathbb{C}^n$. Для точки $a \in \mathbb{C}^n$ через $S_{n,a}$ обозначим семейство всех $P \in S_n$, проходящих через a.

Пусть $(\overline{\mathbb{C}})^n$ — топологическое произведение n экземпляров $\overline{\mathbb{C}}^n$, $\mathbf{P}^n$ — n-мерное комплексное проективное пространство.

Одноточечная компактификация пространства $\mathbb{C}^n$, пространства $(\overline{\mathbb{C}})^n$, $\mathbf{P}^n$ являются простейшими примерами расширений $\mathbb{C}^n$, допустимых относительно каждого из семейств S_n и $S_{n,a}$ при любом $a \in \mathbb{C}^n$.

Пусть S — некоторое фиксированное семейство комплексных прямых $P \subset \mathbb{C}^n$, а $\tilde{\mathbb{C}}^n$ — расширение $\mathbb{C}^n$, допустимое относительно S.

Для множества $E \subset \tilde{\mathbb{C}}^n$ через $\widetilde{\partial E}$ обозначим границу E в $\tilde{\mathbb{C}}^n$ и положим $\partial E := \mathbb{C}^n \cap \widetilde{\partial E}$, $\overline{E} := E \cup \partial E$, $\tilde{E} := E \cup \widetilde{\partial E}$. Через $(E)_i$ обозначим множество всех изолированных точек E и положим $(E)_l := E \setminus (E)_i$. Очевидно, $(E)_l$ — множество всех предельных точек E, принадлежащих множеству E.

Пусть в открытом множестве $G \subset \tilde{\mathbb{C}}^n$ задана вещественнозначная функция u. Обозначим $B_G(u(\cdot), z) := \overline{\lim\limits_{\zeta\to z, \zeta\in G}}\, u(\zeta)$, $z \in \widetilde{\partial G}$. Через $|\cdot|_m$ обозначим евклидову норму в $\mathbb{C}^m$.

На основании одномерных результатов из [1, 8] доказываются следующие многомерные результаты.

Теорема 1. *Пусть фиксированы произвольные натуральные n, k, открытое множество $G \subset \mathbb{C}^n$ и функция $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $\tilde{\mathbb{C}}^n$ — расширение $\mathbb{C}^n$, допустимое относительно S_n, и $f : \tilde{G} \to \mathbb{C}^k$ — непрерывное отображение, голоморфное в G и подчиненное условию*

$$|f(z) - f(\zeta)|_k \leqslant \mu(|z-\zeta|_n) \quad \forall z, \zeta \in \partial G, \quad z \neq \zeta. \tag{2}$$

Если G не ограничено, то пусть также $\mu_\infty \geqslant 0$. Тогда

$$|f(z) - f(\zeta)|_k \leqslant \mu(|z-\zeta|_n) \quad \forall z, \zeta \in \overline{G}, \quad z \neq \zeta. \tag{3}$$

Замечание. Если $\mathbb{C}^n \setminus G$ содержит менее двух точек, то условие (2) теряет смысл и становится излишним, но (3) сохраняет силу, ибо в этом случае $f \equiv \text{const}$. Для неубывающих положительных $\mu \in \mathfrak{M}$ и $\tilde{\mathbb{C}}^n := (\overline{\mathbb{C}})^n$ теорема 1 получена в [7].

Для всякого множества $E \subset \tilde{\mathbb{C}}^n$, отображения $f : E \to \mathbb{C}^k$ и $P \in S$ через f_P условимся обозначать сужение f на $\tilde{P} \cap E$.

Теорема 2. *Пусть фиксированы произвольные натуральные n, k, открытое множество $G \subset \mathbb{C}^n$ и функция $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $\tilde{\mathbb{C}}^n$ — расширение $\mathbb{C}^n$, допустимое относительно S_n, и $f : \tilde{G} \to \mathbb{C}^k$ — отображение, голоморфное в G и подчиненное условию* (2). *Предположим, что для всякой $P \in S_n$ отображение f_P непрерывно на $\widetilde{P \cap G}$, а если $\mu_\infty < 0$, то пусть также $\infty(P) \notin (\tilde{P} \setminus G)_i$. Тогда верно* (3).

В связи с оценкой (3) для случая $\mu_0 > 1$ заметим, что при любых натуральных n, k справедлив полный аналог предложения 1 из работы [8].

Всякую комплексную прямую $P \subset \mathbb{C}^n$ пополним одной точкой, дополняющей P до компактного пространства $\overline{P}$. Обозначим эту точку через $\infty(P)$. Если $E \subset P$, то через $\overline{E}$ обозначим замыкание E в $\overline{P}$. Если $E \subset \overline{P}$, то через $(E)_i$ обозначим множество всех изолированных точек E.

Для открытого множества $G \subset \mathbb{C}^n$ и комплексной прямой $P \subset \mathbb{C}^n$ индексом j пронумеруем все связные компоненты $(P \cap G)_j$ множества $P \cap G$, а при $a \in \mathbb{C}^n$ введем величины

$$f_{P,a,G,j} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\substack{\zeta \to a \\ \zeta \in (P \cap G)_j \setminus \{a\}}}} \dfrac{\log |f_P(\zeta)|_k}{|\log|\zeta - a|_n|} & \text{при } a \in \overline{(P \cap G)_j}, \\ 0 \text{ при } a \notin \overline{(P \cap G)_j}, & \end{cases}$$

$$f_{P,\infty,G,j} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\substack{\zeta \to \infty(P) \\ \zeta \in (P \cap G)_j}}} \dfrac{\log |f_P(\zeta)|_k}{\log|\zeta|_n} & \text{при } \infty(P) \in \overline{(P \cap G)_j}, \\ 0 \text{ при } \infty(P) \notin \overline{(P \cap G)_j}. & \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть фиксированы произвольные натуральные n, k, открытое множество $G \subset \mathbb{C}^n$ и функция $\mu \in \mathfrak{M}$ такая, что $\mu_0 \leqslant 1$. Пусть $f : \overline{G} \to \mathbb{C}^k$ — отображение, голоморфное в G и подчиненное условию* (2). *Предположим, что для всякой комплексной прямой $P \subset \mathbb{C}^n$ отображение f_P непрерывно на $P \cap \overline{G}$ и либо $\infty(P) \notin (\overline{P} \setminus G)_i$ и $f_{P,\infty,G,j} < +\infty$ при всех j, либо $\infty(P) \in (\overline{P} \setminus G)_i$, $\mu_\infty \geqslant 0$ и выполнено соотношение*

$$|f_P(\zeta)|_k = o(|\zeta|_n^{m_\infty + 1}), \quad \zeta \to \infty(P). \tag{4}$$

Тогда имеет место одно и только одно из двух — либо соотношение (3), *либо следующий исключительный случай: $\mu(x) = \beta x$; $\beta \geqslant 0$; $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ — линейный оператор с нормой $\| A \| > \beta$; $b \in \mathbb{C}^k$; $f(\zeta) = b + A\zeta$; K — конус всех $\zeta \in \mathbb{C}^n$ таких, что $|A\zeta|_k > \beta |\zeta|_n$; G — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ такое, что для всякой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus G$ выполняется включение $\{\zeta : \zeta - z \in K\} \subset G$ (при указанных условиях конус K открыт, множество G связно и $\overline{G} = \mathbb{C}^n$).*

Для множества $G \subset \mathbb{C}^n$ и комплексной прямой $P \subset \mathbb{C}^n$ через $\partial_P (P \cap G)$ обозначим границу множества $P \cap G$ в P.

Множество $E \subset \mathbb{C}^n$, не содержащее точку $a \in \mathbb{C}^n$, называется *конусом с вершиной a*, если E инвариантно относительно преобразования $\zeta \mapsto a + \lambda(\zeta - a)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Теорема 4. *Пусть фиксированы произвольные натуральные n, k, открытое множество $G \subset \mathbb{C}^n$, точка $a \in \mathbb{C}^n \setminus G$ и функция $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть*

$f: G \to \mathbb{C}^k$ — голоморфное отображение, которое ограничено на всякой ограниченной части G, отделимой от точки a, и удовлетворяет условию

$$B_G(|f(\cdot)|_k, z) \leqslant \mu(|z-a|_n) \ \forall z \in (\partial G) \setminus \{a\}. \tag{5}$$

Предположим, что для всякой комплексной прямой P, содержащей точку a, справедливы соотношения $f_{P,a,G,j} + f_{P,\infty,G,j} < +\infty$ при всех j, а если $a \in (\partial_P(P \cap G))_i$ (аналогично $\infty(P) \in (\partial_P(P \cap G))_i$), пусть также верно $\mu_0 < +\infty$ и $|f_P(\zeta)|_k = o(|\zeta - a|_n^{m_0-1})(\zeta \to a)$ (соответственно $\mu_\infty \geqslant 0$ и (4)). Тогда имеет место одно и только одно из двух — либо соотношение

$$|f(\zeta)|_k \leqslant \mu(|\zeta - a|_n) \quad \forall \zeta \in G, \tag{6}$$

либо следующий исключительный случай: $\mu(x) = \beta x^m$, β—постоянное, $\beta \geqslant 0$, m — целое, $m = m_0 = m_\infty$, а если $n \geqslant 2$, то $m \geqslant 0$; множество $G_* := \{\zeta \in G : |f(\zeta)|_k > \beta |\zeta - a|_n\}$ есть непустой открытый конус с вершиной a и выполнено соотношение однородности $f[a + \lambda(\zeta - a)] = \lambda^m f(\zeta) \forall \zeta \in G_*$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; если $m = 0$, то $G_* = \mathbb{C}^n \setminus \{a\}$ и $f \equiv \text{const}$. Если в исключительном случае $\partial G_* \neq \{a\}$, то $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$ и

$$\lim_{\zeta \to z, \zeta \in G_*} |f(\zeta)|_k = \beta |z - a|_n^m \quad \forall z \in (\partial G_*) \setminus \{a\}.$$

Рассмотрим примеры исключительных случаев к теореме 4. Фиксируем $\alpha \in (0, 10^{-2})$, натуральное m и (для простоты) $n = 2$, $k = 1$. Положим $\mu(x) := (1 - \alpha) x^m$, $a := (0, 0) \in \mathbb{C}^2$, $G := \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2 : |\zeta_2/\zeta_1| < 1\}$, $f_1(\zeta) := \zeta_1^m$, $f_2(\zeta) := \zeta_1^m[1 + \alpha \exp(\zeta_2/\zeta_1)]$. Можно проверить, что если в качестве f взять f_s, $s = 1, 2$, то условие (5) будет выполнено, но оценка (6) нарушится в точках $\zeta = (\zeta_1, 0)$, $\zeta_1 \neq 0$. Как видим, теорема 4 допускает исключительные случаи как с полиномиальными, так (при $n \neq 1$) и с трансцендентными f (ср. с [8]).

2. Доказательство теорем. Для всякой пары точек z, $\zeta \in \mathbb{C}^m$, $z \neq \zeta$, через $P(z, \zeta)$ обозначим проходящую через них комплексную прямую.

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2.

Убедимся в справедливости теоремы 2. При $k = 1$ для всякой пары точек z, $\zeta \in \overline{G}$, $z \neq \zeta$, рассмотрим прямую $P(z, \zeta) =: P$ и к функции f_P применим теорему 2_* работы [8]. Отсюда видна справедливость утверждения теоремы 2 при $k = 1$. Пусть теперь $k > 1$. Для всякой пары точек z, $\zeta \in \overline{G}$, $z \neq \zeta$, рассмотрим комплексную прямую $P(f(z), f(\zeta))$ и через L обозначим ортогональное проектирование $\mathbb{C}^k$ на эту прямую. Пусть ψ — конформное изометрическое отображение прямой $P(f(z), f(\zeta))$ на $\mathbb{C}$. Теперь к функции $\psi(Lf(\cdot))$ применима доказанная часть теоремы 2, соответствующая значению $k = 1$. В результате получим (3). Теорема 2 доказана.

Для произвольного точечного множества E через $\operatorname{Card} E$ обозначим его мощность.

Приступим к доказательству теоремы 3. Для этого установим следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и для фиксированных точек z^0, $z^1 \in G$ имеет место соотношение*

$$|f(z^1) - f(z^0)|_k > \mu(|z^1 - z^0|_n). \tag{7}$$

Тогда существуют постоянная β, линейный оператор $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$, окрестность V_0 точки z^0 и окрестность V_1 точки z^1 такие, что $\|A\| > \beta \geqslant 0$ и

$$\mu(x) = \beta x \quad \forall x > 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{Card}(P(z^0, z^1) \setminus G) \leqslant 1, \tag{9}$$

$$f(\lambda(z - z^0) + z^0) - f(z^0) = \lambda A(z - z^0) \quad \forall z \in V_1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

$$f(z) - f(z^0) = A(z - z^0) \quad \forall z \in V_0. \tag{11}$$

Через 0_m обозначим точку $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^m$.

Докажем лемму 1 для $k = 1$. Для простоты и не умаляя общности в доказательстве будем считать, что $z^0 = 0_n$ и $f(z^0) = 0$. Тогда для открытого множества $G_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda z^1 \in G\}$, функций $f_{P(z^0, z^1)}(\lambda z^1)$ от $\lambda \in G_1$ и $\mu_1(x) := \mu(x |z^1|_n)$ от $x > 0$ выполнены все условия теоремы 2 работы [8] и неравенство $|f_{P(z^0,z^1)}(z^1)| > \mu(|z^1|_n)$, соответствующее значению $\lambda = 1$. Поэтому имеет место исключительный случай утверждения теоремы 2 из [8], т. е. выполнено (8), (9) и

$$f_{P(z^0,z^1)}(\lambda z^1) = c\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

где c, β — постоянные, $|c| > \beta \geqslant 0$.

Для точек z, принадлежащих некоторой окрестности V_0 точки z^0, функция f представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{m \geqslant 1} p_m(z) \quad \forall z \in V_0 \tag{13}$$

по однородным полиномам $p_m(z) = \sum\limits_{\alpha : |\alpha| = m} q_\alpha z^\alpha$ степени m от координат $z_1, \ldots, z_n$ точки $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где q_α не зависят от z, а $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$ целые, $j = 1, \ldots, n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \ldots z_1^{\alpha_n}$.

Для некоторой окрестности V_1 точки z^1 имеет место оценка

$$|f(z)| > \mu(|z|_n) \quad \forall z \in V_1, \tag{14}$$

и потому при каждом фиксированном $z \in V_1$ функция $f_{P(z^0,z)}(\lambda z)$ от $\lambda \in \mathbb{C}$ представима в виде

$$f_{P(z^0,z)}(\lambda z) = c(z)\lambda \quad \forall z \in V_1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{15}$$

где $c(z)$ не зависит от λ, но, вообще говоря, зависит от z.

При $z \in V_1$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежащих некоторой окрестности U точки 0, $\lambda z \in V_0$ и потому из (13) вытекает

$$f(\lambda z) = \sum_{m \geqslant 1} \lambda^m p_m(z) \quad \forall z \in V_1, \quad \forall \lambda \in U. \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), последовательно получаем

$$\sum_{m \geqslant 1} \lambda^m p_m(z) = c(z)\lambda \quad \forall z \in V_1, \quad \forall \lambda \in U,$$

$$p_m(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad \forall m \geqslant 2, \tag{17}$$

$$f(\lambda z) = \lambda p_1(z) \quad \forall z \in V_1, \quad \forall \lambda \in U. \tag{18}$$

Обозначая $p_1(z) =: Az$, из (13) и (17) выводим

$$f(z) = p_1(z) = Az \quad \forall z \in V_0. \tag{19}$$

Соотношения (18), (19) и приведенные выше факты убеждают в справедливости леммы 1 в случае $k = 1$.

Справедлива также следующая лемма.

Л е м м а 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда* β *и* A, *существование которых утверждается в лемме 1, единственны, множество* $K := \{z : |Az|_k > \beta |z|_n\}$ *есть непустой открытый конус, множество*

$$K_0 := \{z : |A(z - z^0)|_k > \beta |z - z^0|_n\}, \tag{20}$$

связано с ним соотношением $K_0 = \{z : z - z^0 \in K\}$ *и верно*

$$\operatorname{Card}(P(z^0, z) \setminus G) \leqslant 1 \quad \forall z \in K_0. \tag{21}$$

$$f(\lambda(z - z^0) + z^0) - f(z^0) = \lambda A(z - z^0) \; \forall z \in K_0, \; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{22}$$

$$|f(z) - f(z^0)|_k > \beta |z - z^0|_n \quad \forall z \in K_0, \tag{23}$$

$$|f(z) - f(z^0)|_k \leqslant \beta |z - z^0|_n \quad \forall z \in G \setminus K_0. \tag{24}$$

Единственность β и A следует из (8) и (11), а из линейности и однородности функции $z \mapsto Az$ вытекает, что K есть конус, непустой в силу (7).

Рассмотрим случай $k = 1$ и применим доказанную часть леммы 1 к точке z^0 и произвольной точке $z^* \in V_0 \cap K_0$, взятой вместо z^1. Записывая для этого случая аналог соотношений (9) и (10), убеждаемся в справедливости соотношений (21) и (22). Из (20) и (22) следует (23), а из (19) и (20) вытекает

$$|f(z) - f(z^0)|_k \leqslant \beta |z - z^0|_n \quad \forall z \in V_0 \setminus K_0. \tag{25}$$

Но для всякой точки $z \in G$, в которой

$$|f(z) - f(z^0)|_k > \beta |z - z_0|_n, \tag{26}$$

верно также

$$f(\lambda (z - z^0) + z^0) - f(z^0) = \lambda A (z - z^0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{27}$$

и $z \in K_0$. Отсюда следует (24). Лемма 2 для $k = 1$ доказана.

Теперь докажем леммы 1 и 2 при $k > 1$. Для простоты предположим, что $z^0 = 0_n$, $f(z^0) = 0_k$. В этом случае $K = K_0$.

Для всякой точки $w \in \mathbb{C}^k, w \neq 0_k$, через L_w обозначим оператор ортогонального проектирования $\mathbb{C}^k$ на комплексную прямую $P(0_k, w)$. В терминах скалярного произведения $(v, w) := \sum_{s=1}^{k} v_s \overline{w}_n$ векторов $v = (v_1, \ldots, v_k)$, $w = (w_1, \ldots, w_k) \in \mathbb{C}^k$ имеем

$$L_w f(z) = (f(z), w)\, w\, |w|_k^{-2}. \tag{28}$$

Отображение $\lambda \mapsto w|w|_k^{-1}\lambda$ является изометрическим вложением $\varphi_w : \mathbb{C} \to P(0_k, w)$. Пусть $\psi_w := \varphi_w^{-1}$. Рассмотрим функцию $\psi_w(L_w f(\cdot))$. Имеем

$$\psi_w(L_w f(z)) = (f(z), w)\, |w|_k^{-1}. \tag{29}$$

При каждом фиксированном w из некоторой окрестности W точки $f(z^1)$, не содержащей точку 0_k, и при всех z из некоторой окрестности V_w точки z^1 выполнено неравенство

$$|L_w f(z)|_k > \mu(|z|_n), \tag{30}$$

а потому

$$|(f(z), w)|\, |w|_k^{-1} > \mu(|z|_n) \quad \forall z \in V_w, \quad \forall w \in W. \tag{31}$$

При каждом фиксированном $w \in W$ к голоморфной по $z \in G$ функции (29) на основании (31) можно применить леммы 1 и 2 с $k = 1$. Поэтому верны соотношения (8), (9) и

$$(f(\lambda z), w)\, |w|_k^{-1} = A_w \lambda z \quad \forall z \in V_w, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall w \in W, \tag{32}$$

где $A_w : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ — линейный оператор, зависящий от $w \in W$, с нормой $\|A_w\| > \beta$, а β — постоянная из (8). Пусть $f =: (f_1, \ldots, f_k)$. Выбирая в W линейно не зависимые точки $w^s = (w_1^s, \ldots, w_k^s)$, $s = 1, \ldots, k$, из (32) получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(\lambda z)\, \overline{w}_j^s = |w^s|_k A_{w^s} \lambda z \quad \forall z \in V_{w^s}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad s = 1, \ldots, k,$$

однозначно разрешимую относительно $f_j(\lambda z)$, $j = 1, \ldots, k$, и определяющую $f_1(\lambda z), \ldots, f_k(\lambda z)$ как линейные однородные функции от координат $\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n$ точки $\lambda z = \lambda(z_1, \ldots, z_n)$. Значит,

$$f(\lambda z) = \lambda A z \quad \forall z \in \bigcap_{s=1}^{k} V_{w^s}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{33}$$

где $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ — линейный оператор. Поэтому, принимая во внимание голоморфность f в окрестности точки z^0, в некоторой ее окрестности V^0 получаем $f(z) = Az \; \forall z \in V^0$. Из (7), (8) и формулы (33), примененной к $\lambda = 1$, $z = z^1$, имеем

$$|Az^1|_k > \beta |z^1|_n, \tag{34}$$

откуда видно, что $\| A \| > \beta$.

Принимая в качестве z^1 каждую точку множества $V^0 \cap K_0$ и записывая для нее аналоги соотношений (9), (33) и (34), получаем (21) и $f(\lambda z) = \lambda Az \; \forall z \in K_0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \; |f(z)|_k > \beta |z|_n \; \forall z \in K_0$.

Для всякой точки $z \in G$, в которой $|f(z)|_k > \mu(|z|_n)$, верно также $f(z) = Az$, $|Az|_k > \beta |z|_n$, и потому $z \in K_0$. Значит, $|f(z)|_k \leqslant \beta |z|_n \; \forall z \in G \setminus K_0$.

Из всего изложенного видна справедливость лемм 1 и 2 для $k > 1$ при сделанных предположениях о том, что $z^0 = 0_n$, $f(z^0) = 0_k$. Теперь эти предположения легко снять. Леммы 1 и 2 доказаны.

Установим теперь следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда G связно, $\overline{G} = \mathbb{C}^n$ и для $\zeta \in \mathbb{C}^n$*

$$f(\zeta) = A(\zeta - z^0) + f(z^0), \tag{35}$$

где A — оператор из формулировки леммы 1. Кроме того, для всякой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus G$ выполняется включение $\{\zeta : \zeta - z \in K\} \subset G$, где K — конус, определенный в формулировке леммы 2.

Доказательство. Рассмотрим комплексную прямую $P_w(z^0) := \{\zeta = z^0 + \lambda w, \lambda \in \mathbb{C}\}$ с произвольным направляющим вектором $w \in K$, $|w|_n = 1$, и число $\gamma := |Aw|_k$. Очевидно, $\gamma > \beta$ и $\operatorname{Card}(P_w(z^0) \setminus G) \leqslant 1$. Поэтому, фиксируя $\zeta^0 \in \mathbb{C}^n$, можно указать $\lambda_0 > 0$ настолько большое, что точка $\zeta^1 := z^0 + \lambda_0 w$ принадлежит G и

$$\frac{\lambda_0 \gamma - |A(\zeta^0 - z^0)|_k}{\lambda_0 + |\zeta^0 - z^0|_n} > \beta.$$

Точки z^0 и ζ^1 принадлежат одной и той же связной компоненте G_0 множества G и потому в окрестности точки ζ^1 выполнено равенство (35). Далее, имеем

$$\frac{|A(\zeta^0 - \zeta^1)|_k}{|\zeta^0 - \zeta^1|_n} \geqslant \frac{|A(z^0 - \zeta^1)|_k - |A(\zeta^0 - z^0)|_k}{|z^0 - \zeta^1|_n + |\zeta^0 - z^0|_n} = \frac{\lambda_0 \gamma - |A(\zeta^0 - z^0)|_k}{\lambda_0 + |\zeta^0 - z^0|_n} > \beta.$$

Следовательно, $\zeta^1 - \zeta^0 \in K$. А так как в окрестности точки ζ_1 имеет место (35), то при достаточно малом $\lambda > 0$ для точек ζ^1 и $\zeta^2 := \zeta^1 + \lambda(\zeta^0 - \zeta^1)$ верно неравенство $|f(\zeta^1) - f(\zeta^2)|_k > \mu(|\zeta^1 - \zeta^2|_n)$. Применяя лемму 1 к точкам ζ^1 и ζ^2 (вместо z^0 и z^1) и учитывая, что $\zeta^2 \in P(\zeta^1, \zeta^0)$, получаем $\operatorname{Card}(P(\zeta^1, \zeta^0) \setminus G) \leqslant 1$, откуда следует, что $\zeta^0 \in \overline{G}_0$. Тем самым доказаны связность G и соотношение $\overline{G} = \mathbb{C}^n$. Следовательно, (35) верно во всем пространстве $\mathbb{C}^n$.

Пусть теперь $z \in \mathbb{C}^n \setminus G$ и $v \in K$. Тогда $z \in \partial G$ и

$$|f(z) - f(\zeta)|_k > \mu(|z - \zeta|_n) \tag{36}$$

для любой точки $\zeta \in P_v(z)$, $\zeta \neq z$. Но (36) невозможно для $\zeta \in \partial G$ в силу условий $z \in \partial G$ и (2). Значит, $P_v(z) \setminus \{z\} \subset G$. Лемма 3 доказана.

Справедливость теоремы 3 видна непосредственно из утверждений лемм 1—3. Теорема 3 доказана.

Докажем теорему 4. Установим следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 4, $a = 0_n$ и для фиксированной точки $z^1 \in G$ имеет место соотношение*

$$|f(z^1)|_k > \mu(|z^1|_n). \tag{37}$$

Тогда существуют постоянная $\beta \geqslant 0$, целое m и окрестность V_1 точки z^1 такие что, $m = m_0 = m_\infty$, $V_1 \subset G$ и

$$\mu(x) = \beta x^m \quad \forall x > 0, \tag{38}$$

$$P(a, z^1) \subset G \cup \{a\}, \tag{39}$$

$$f(\lambda z) = \lambda^m f(z) \quad \forall z \in V_1, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{40}$$

Докажем лемму для $k = 1$. В этом случае для открытого множества $G_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda z^1 \in G\}$, функций $f_{P(a,z^1)}(\lambda z^1)$ от $\lambda \in G_1$ и $\mu_1(x) := \mu(x \mid z^1 \mid_n)$ от $x > 0$ выполнены все условия теоремы 3 работы [8] и неравенство $|f_{P(a,z^1)}(z^1)| > \mu(|z^1|_n)$, соответствующее значению $\lambda = 1$. Поэтому имеет место исключительный случай утверждения упомянутой теоремы, т. е. выполнено (38), (39) и $f_{P(a,z^1)}(\lambda z^1) = \lambda^m f_{P(a,z^1)}(z^1)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, где β, m — постоянные, не зависящие от λ, причем $\beta \geqslant 0$, m целое, $m = m_0 = m_\infty$. Отсюда и из (38) ясно, что β и m не зависят от z^1.

Для некоторой окрестности V_1 точки z^1 имеют место соотношения $V_1 \subset G$ и $|f(z)|_k > \mu(|z|_n)$ $\forall z \in V_1$, и потому при каждом фиксированном $z \in V_1$ функция $f_{P(a,z)}(\lambda z)$ от $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ удовлетворяет соотношению $f_{P(a,z)}(\lambda z) = \lambda^m f_{P(a,z)}(z)$ $\forall z \in V_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Лемма 4 доказана для $k = 1$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 4 и $D := \{\zeta \in G : : |f(\zeta)|_k > \mu(|\zeta|_n)\}$. Тогда D есть непустой открытый конус с вершиной a и выполнено включение*

$$P(a, z) \subset D \cup \{a\} \quad \forall z \in D \tag{41}$$

и соотношение однородности

$$f_{P(a,z)}(\lambda z) = \lambda^m f_{P(a,z)}(z) \quad \forall z \in D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{42}$$

где m определено в формулировке леммы 4.

Утверждение леммы 5 выводится (при любом k) непосредственно из утверждения леммы 4, для чего в последней в качестве z^1 следует взять произвольную точку $z \in D$. При каждом $z \in D$ включение $P(a, z) \subset D \cup \{a\}$ следует из (37)—(40). Таким образом, справедливость леммы 5 доказана для $k = 1$.

Теперь докажем леммы 4 и 5 для $k > 1$. Пусть $0_k, L_w, \psi_w, W, V_w, w^1, \ldots, w^k$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве лемм 1, 2 для $k > 1$. Тогда при каждом фиксированном $w \in W$ к голоморфной по $z \in G$ функции (29) на основании (31) можно применить леммы 4 и 5 с $k = 1$. Поэтому верны соотношения (38), (39) и $(f(\lambda z), w) = \lambda^m (f(z), w)$ $\forall z \in V_w$, $\forall \lambda \in \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с теми же β и m, что в утверждении леммы 4. Принимая $w = = w^1, \ldots, w^k$, получаем систему уравнений

$$(f(\lambda z) - \lambda^m f(z), w^s) = 0 \quad \forall z \in V_{w^s}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad s = 1, \ldots, k, \tag{43}$$

в которой, согласно выбору, $w^1, \ldots, w^k$ линейно независимы.

Отсюда следует соотношение

$$f(\lambda z) = \lambda^m f(z) \quad \forall z \in \bigcap_{s=1}^{k} V_{w^s}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{44}$$

Из (37)—(39) и (44) вытекает, что $P(a, z^1) \subset D \cup \{a\}$. Отсюда и из (44) ввиду произвольности $z^1 \in D$ получаем (41) и (42).

Леммы 4 и 5 доказаны для произвольного k.

Для $R > 0$ обозначим $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta|_n = R\} =: S_R$.

Лемма 6. *Если в открытом множестве $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ отображение $\Phi : : D_0 \to \mathbb{C}^k$ голоморфно и однородно степени 0, то при $R > 0$ для любой точки $\zeta^0 \in D_0 \cap S_R$, всякого малого $r > 0$ и шара $B_r(\zeta^0) := \{\zeta : |\zeta - \zeta^0|_n < r\}$ верно*

$$|\Phi(\zeta^0)|_k \leqslant \sup_{\zeta \in S_R \cap B_r(\zeta^0)} |\Phi(\zeta)|_k, \tag{45}$$

причем равенство равносильно тому, что $\Phi(\zeta) \equiv \mathrm{const}$ в $B_r(\zeta^0)$.

Доказательство. Пусть $\zeta^0 =: (\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0)$, $\zeta =: (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Предположим, что на $D_0 \cap S_R$ функция $|\Phi(\zeta)|_k$ от ζ достигает локального максимума при значении ζ, равном ζ^0.

Пусть сначала $\zeta_2^0 = \zeta_3^0 = \ldots = \zeta_n^0 = 0$. Тогда при достаточно малом $\rho \in (0, R)$ сужение Φ_1 отображения Φ на пересечение комплексной гиперплоскости $H_1 := \{\zeta : \zeta_1 = \zeta_1^0\}$ с $B_\rho(\zeta^0)$ определено и голоморфно по $\zeta \in H_1 \cap \cap B_\rho(\zeta^0)$, а на множестве $H_1 \cap B_\rho(\zeta^0)$ функция $|\Phi_1(\cdot)|_k$ достигает максимума в точке ζ^0. Следовательно, $\Phi_1(\zeta) \equiv \mathrm{const}$ по $\zeta \in H_1 \cap B_\rho(\zeta^0)$. Поэтому при достаточно малом $r \in (0, \rho)$ для $\zeta \in B_r(\zeta^0)$ имеем $\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta\zeta_1^0/\zeta_1) = \Phi(\zeta^0) \equiv \mathrm{const}$ $\forall \zeta \in B_r(\zeta^0)$. Итак, Φ постоянно в $B_r(\zeta^0)$.

Если отказаться от условий $\zeta_2^0 = \ldots = \zeta_n^0 = 0$, то к рассмотренному случаю можно прийти с помощью унитарного автоморфизма $\mathbb{C}^n$. Отсюда следует справедливость утверждения леммы 6.

Лемма 7. *Пусть $n \geqslant 2$ и в открытом конусе $K \subset \mathbb{C}^n$ отображение $\Phi : K \to \mathbb{C}^k$ голоморфно и однородно степени $m < 0$. Пусть $R > 0$, $\zeta^0 \in \in K \cap S_R$ и $\Phi(\zeta) \not\equiv 0_k$ во всякой окрестности точки ζ^0. Тогда для любого малого $r > 0$*

$$|\Phi(\zeta^0)|_k < \sup_{\zeta \in S_R \cap B_r(\zeta^0)} |\Phi(\zeta)|_k. \tag{46}$$

Доказательство Предположим, что $\zeta^0 = (\zeta_1^0, 0, \ldots, 0)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots \ldots, \zeta_n)$. Тогда при достаточно малом $r \in (0, R)$ будет $B_r(\zeta^0) \subset K$ и $\Phi(\zeta) = (\zeta_1/\zeta_1^0)^m \Phi(\zeta\zeta_1^0/\zeta_1)$ $\forall \zeta \in B_r(\zeta^0)$. Так как $m < 0$, то функция $|\zeta_1/\zeta_1^0|^m$ от ζ в точке ζ^0 достигает своего строгого локального минимума на $S_R \cap K$. Кроме того, отображение $\zeta \mapsto \Phi(\zeta\zeta_1^0/\zeta_1)$ голоморфно и однородно степени 0 в $B_r(\zeta^0)$ и в силу леммы 6 имеем

$$|\Phi(\zeta^0)|_k \leqslant \sup_{\zeta \in S_R \cap B_r(\zeta^0)} |\Phi(\zeta\zeta_1^0/\zeta_1)|_k.$$

Из приведенных фактов с учетом условия леммы 7 следует (46).

От условия $\zeta^0 = (\zeta_1^0, 0, \ldots, 0)$ можно отказаться за счет надлежащего унитарного автоморфизма $\mathbb{C}^n$. Лемма 7 доказана.

Теперь докажем теорему 4. Предположим, что в точке $z^1 \in G$ оценка (6) не выполняется. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = 0_n$. Тогда справедливы все утверждения лемм 4 и 5 и множество D, определенное в лемме 5, совпадает с конусом G_* из формулировки теоремы 4. При этом соотношение $S_1 \subset G_*$ равносильно тому, что $G_* = \mathbb{C}^n \setminus \{a\}$.

При $n = 1$ справедливость теоремы 4 следует из лемм 4 и 5.

Пусть $n \geqslant 2$ и $m \leqslant 0$. Если $S_1 \not\subset G_*$, то оценка (5) противоречит определению G_* и утверждениям лемм 6 и 7, примененных к f в G_*. Поэтому $S_1 \subset G_*$ и на компакте S_1 функция $|f(\cdot)|_k$ должна достигать своего локального максимума в некоторой точке $\zeta^0 \in G_*$. Но при $m < 0$ это невозможно в силу леммы 7, а при $m = 0$ на основании леммы 6 в этом случае $f(\zeta) \equiv \mathrm{const}$ в G_* $(= \mathbb{C}^n \setminus \{a\})$.

Следовательно, если $n \geqslant 2$ и $\partial G_* \neq \{a\}$, то $m \geqslant 1$, а из (5) и определения G_* следует

$$\lim_{\zeta \to z, \zeta \in G_* \cap S_R} |f(\zeta)|_k = \beta R^m \quad \forall z \in S_R \cap \partial G_*$$

Из всего изложенного с учетом лемм 4 и 5 видна справедливость теоремы 4 и для $n \geqslant 2$. Теорема 4 доказана.

1. *Тамразов П. М.* Голоморфные функции и отображения в контурно-телесной задаче // Докл. АН СССР.— 1984.— **279**, № 1.— С. 38—43.
2. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).

3. *Чирка Е. М.* Аналитическое представление CR-функций // Мат. сб.— 1975.— **98**, № 4.— С. 591—623.
4. *Шехорский А. И.* Контурно-телесные теоремы голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$ // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 1.— С. 107—109.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* О дифференциальных свойствах действительных и комплексных функций // Там же.— № 4.— 465—469.
6. *Щехорский А. И.* Некоторые контурно-телесные свойства голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$ // Там же.— 1983.— **35**, № 2.— С. 212—219.
7. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные свойства голоморфных функций и отображений с билогарифмически вогнутыми мажорантами // Докл. АН СССР.— 1983.— **270**, № 4.— С. 791—795.
8. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— **50**, № 4.— С. 835—848.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.09.86