УДК 518:517.948

Фам Ки Ань

О двух приближенных методах решения нелинейных задач Неймана

В данной работе предлагаются два итерационных метода решения следующей нелинейной задачи Неймана:

$$\mathcal{A}u := \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x, u, D^{\alpha}u), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n, x_j) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — некоторая ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \in C^2$, α — мультииндекс $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$, а n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Предположим, что коэффициенты $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$, $a_{ij} = a_{ji}$ удовлетворяют условию равномерной эллиптичности: $\forall x \in \bar{\Omega}$; $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i^2$, где $\nu > 0$ — некоторая константа.

Частные случаи задачи (1), (2) были изучены, например, в [1—4]. В В пп. 1, 2 настоящей работы описаны нелинейный метод Зейделя и метод Зейделя — Ньютона для приближенного решения нелинейного операторного уравнения с линейной фредгольмовой частью:

$$Ax + F(x) = 0. \tag{3}$$

При этом получены некоторые обобщения результатов [1, 2]. В п. 3 нелинейная задача Неймана (1), (2) сведена к операторному виду (3). В п. 4 предложены конкретные алгоритмы решения задачи (1), (2).

1. Нелинейный метод Зейделя. Приведем следующий локальный вариант теоремы Адамара:

Теорема 1. *Пусть оператор $F: D \subset X \to Y$ непрерывно дифференцируем на открытом множестве D, содержащем открытый шар $S(x_0, r)$ такой, что для всех $x \in S(x_0, r)$, $\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant \gamma$. Если $r > \gamma\|F(x_0)\|$, то уравнение $F(x) = 0$ имеет решение в $S(x_0, r)$.*

Теорема 1 доказана в [5] для случая $X = Y = \mathbb{R}^n$. Однако она верна и для произвольных банаховых пространств X, Y.

Теорема 1 допускает обобщение на случай негладких операторов.

Теорема 2. *Пусть оператор $G : D \subset X \to Y$ непрерывно дифференцируем на открытом множестве D, содержащем замкнутый шар $S = \bar{S}(x_0, r)$, а оператор $H : S \subset X \to Y$ липшиц-непрерывен с константой Липшица $L \geqslant 0$. Предположим, что для всех $x \in S$ $\| [G'(x)]^{-1} \| \leqslant \gamma$. Если $\gamma L < 1$ и $r(1 - \gamma L) > \gamma \| G(x_0) + H(x_0) \|$, то уравнение $G(x) + H(x) = 0$ имеет решение в S.*

Доказательство. Положим $r_0 = r(1 - \gamma L)$, $S_0 = S(x_0, r_0)$ и $F_0(x) = G(x) + H(x_0)$. Имеем: $\bar{S}_0 \subset S$, $\| [F_0'(x)]^{-1} \| = \| [G'(x)]^{-1} \| \leqslant \gamma$. Далее, $\gamma \| F_0(x_0) \| = \gamma \| G(x_0) + H(x_0) \| < r(1 - \gamma L) = r_0$, следовательно, по теореме 1 существует такой $x_1 \in S_0$, что $F_0(x_1) = 0$, т. е. $G(x_1) + H(x_0) = 0$. Допустим, что существуют такие $x_k \in S$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, что для всех $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\| x_{k+1} - x_k \| < r_k \equiv (\gamma L)^k r_0, \tag{4}$$

$$G(x_{k+1}) + H(x_k) = 0. \tag{5}$$

Положим $r_n = (\gamma L)^n r_0$, $S_n = S(x_n, r_n)$, $F_n(x) = G(x) + H(x_n)$. Для всех $x \in \bar{S}_n$

$$\| x - x_0 \| \leqslant \| x - x_n \| + \sum_{k=0}^{n-1} \| x_{k+1} - x_k \| \leqslant r_n + r_{n-1} + \ldots + r_0 <$$

$$< r_0 (1 - \gamma L)^{-1} = r,$$

следовательно, $\bar{S}_n \subset S$. Отсюда следует, что для всех $x \in \bar{S}_n$ $\| [F_n'(x)]^{-1} \| = \| [G'(x)]^{-1} \| \leqslant \gamma$. Далее, $\gamma \| F_n(x_n) \| = \gamma \| G(x_n) + H(x_n) \| = \gamma \| H(x_n) - H(x_{n-1}) \| \leqslant \gamma L \| x_n - x_{n-1} \| \leqslant \gamma L r_{n-1} = r_n$. Поэтому по теореме 1 существует такой $x_{n+1} \in S_n$, т. е. $\| x_{n+1} - x_n \| < r_n$, что $G(x_{n+1}) + H(x_n) = 0$. Таким образом, существует последовательность $\{x_n\} \subset S$, обладающая свойствами (4), (5).

Из (4) следует, что $x_k \to x^*$, $k \to \infty$. В силу (5) и непрерывности операторов G, H получим $G(x^*) + H(x^*) = 0$. Наконец, $x^* \in S$ ибо $x_n \in S$. Теорема доказана. Вернемся к изучению уравнения (3). В силу фредгольмовости индекса нуль оператора A пространства X, Y разлагаются в прямые суммы замкнутых подпространств: $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где $X_2 = \operatorname{Ker} A$, $Y_1 = \operatorname{Im} A$ и $\dim X_2 = \operatorname{codim} Y_1 < \infty$. Более того, сужение $\hat{A}$ оператора A на X_1 в силу теоремы Банаха имеет ограниченный обратный оператор. Обозначим через $P : Y \to Y$ такой линейный непрерывный проектор, что $\operatorname{Im} P = Y_1$, $\operatorname{Ker} P = Y_2$, а $Q = I - P$, где I — единичный оператор в Y. Очевидно, что $\operatorname{Im} Q = Y_2$; $\operatorname{Ker} Q = Y_1$. Представим каждый элемент $x \in X$ в виде суммы $x = u + v$, где $u \in X_1$, $v \in X_2$.

Следуя [1] будем приближенно решать (3) следующим образом: Зная n-е приближение (x_0 задано), будем строить $(n + 1)$-е приближение по формулам

$$\hat{A} u_{n+1} + PF(x_n) = 0, \tag{6а}$$

$$QF(u_{n+1} + v_{n+1}) = 0, \tag{6б}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}. \tag{6в}$$

Рассуждая аналогично [1] и используя вместо теоремы 1 теорему 2, приходим к следующей теореме, обобщающей результат [1].

Теорема 3. *Пусть оператор $G : D \subset X \to Y$ непрерывно дифференцируем на открытом множестве D, содержащем замкнутый шар $S = \bar{S}(x_0, r)$ и для всех $x \in S$ $\| PG'(x) \| \leqslant \alpha$, $\| QG'(x) \| \leqslant \beta$. Далее, пусть сужение $QG'(x)$ на X_2 имеет в S равномерно ограниченный обратный: $\| [QG'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma$, $x \in S$. Пусть оператор $H : S \subset X \to Y$ липшиц-непрерывен $\| H(x) - H(y) \| \leqslant L \| x - y \|$. Если $q := \alpha (1 + \beta\gamma) \times \| \hat{A}^{-1} \| < 1$ и $\delta < (1 - q) r$, где невязка $\delta := (1 + \beta\gamma) \| \hat{A}^{-1} \| \| Ax_0 +$*

$+ PG(x_0) \| + \gamma \| QG(x_0) \|$, *то существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ *уравнение*

$$Ax + G(x) + \varepsilon H(x) = 0 \tag{7}$$

имеет решение x_ε^*, *которое может быть найдено нелинейным методом Зейделя* (6а)—(6в) (*где* $F = G + \varepsilon H$). *При этом быстрота сходимости метода оценивается неравенством*

$$\| x_n - x_\varepsilon^* \| < q_\varepsilon^n r, \tag{8}$$

где $q_\varepsilon \in [0,1)$ — *некоторая константа, не зависящая от начального приближения* x_0.

С помощью теоремы 3 доказываются полулокальная и локальная сходимости метода (6а)—(6в). (Доказательства этих утверждений приводить не будем.)

2. Метод Зейделя — Ньютона. Повторяя доказательство теоремы 5.2 [2] с некоторыми изменениями, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Предположим, что оператор* F *представим в виде* $F = G + \varepsilon H$, *где* $G : X \to Y$ *непрерывно дифференцируем на открытом множестве* D, *содержащем замкнутый шар* $S = \bar{S}(x_0, r)$, *и оператор* $H : S \subset \subset X \to Y$ *липшиц-непрерывен с константой Липшица* $L > 0$, *а* $\varepsilon > 0$ — *малый параметр. Далее, пусть выполнены следующие условия:*

а) $\| PG'(x) \| \leqslant \alpha$, $\| QG'(x) \| \leqslant \beta$, $\| QG'(x) - QG'(y) \| \leqslant \rho(\| x - y \|)$ *для всех* $x, y \in S$, *где* ρ — *неотрицательная, непрерывная, неубывающая функция и* $\rho(0) = 0$;

б) *сужение* $QG'(x)$ *на* X_2 *имеет равномерно ограниченный обратный в* S: $\| [QG'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma$, $x \in S$;

в) $q := 2\alpha\beta\gamma \| \hat{A}^{-1} \| + \gamma \int_0^1 \rho(\delta t)\, dt < 1$ *и* $2\delta(1-q)^{-1} < r$, *где невязка* $\delta := \\ := \beta\gamma \| \hat{A}^{-1} \| \| Ax_0 + PG(x_0) \| + \gamma \| QG(x_0) \|$. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что при любом* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ *последовательность* $\{x_n\}$, *построенная по формулам*

$$\hat{A}u_{n+1} + PF(x_n) = 0, \tag{9а}$$

$$\tilde{x}_n = u_{n+1} + v_n, \tag{9б}$$

$$v_{n+1} = v_n - [QG'(\tilde{x}_n)]_{X_2}^{-1} QF(\tilde{x}_n), \tag{9в}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}, \tag{9г}$$

сходится к некоторому решению x_ε *уравнения* (7); *при этом справедлива оценка вида* (8).

В качестве немедленного следствия получим теорему 2.1 [2] а из последней, в свою очередь, вытекает теорема 1 [6]. В заключение отметим, что решение уравнения (7) в условиях теорем 3 и 4 локально единственно.

3. Операторная формулировка нелинейной задачи Неймана. Будем называть элемент $u^* \in W_2^2(\Omega)$ решением задачи (1), (2), если он является обобщенным решением следующей линейной задачи:

$$\mathcal{L}u = f(x, u^*, D^\alpha u^*), \quad x \in \Omega,$$

$$\partial u / \partial \sigma = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Сведем задачу (1), (2) к операторному виду (3). Для этого положим $X = \{u \in W_2^2(\Omega) : \partial u/\partial\sigma = 0\}$; $\||u\|| := \left(\sum_{|\beta| \leqslant 2} \int_\Omega |D^\beta u|^2 dx \right)^{1/2}$ $Y = L_2(\Omega)$; $\| y \| = \left(\int_\Omega |y|^2 dx \right)^{1/2}$; $Au = -\mathcal{L}u$; $F(u) = f(x, u, D_u^\alpha)$. В дальнейшем будут приняты следующие обозначения: $\xi\eta = \sum_{i,j=1}^{N} \xi_i \eta_i$; $|\xi| = \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2\right)^{1/2}$ для ξ, $\eta \in \mathbb{R}^N$, $(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x)\,dx$ для $u, v \in L_2(\Omega)$. Приведем некоторые свойства операторов A, F.

Лемма 1. *$A: X \to Y$ является линейным ограниченным фредгольмовым оператором индекса нуль, причем* $\operatorname{Ker} A = X_2$, $\operatorname{Im} A = Y_1$ *и имеют место разложения:* $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, *где* $X_1 = \left\{u \in X : \int_\Omega u\,dx = 0\right\}$, $X_2 = \{u \in X : u = \mathrm{const}\ (\text{п. в})\}$, $Y_1 = \left\{y \in Y : \int_\Omega y\,dx = 0\right\}$, $Y_2 = \{y \in Y : y = \mathrm{const}\ (\text{п. в.})\}$.

Доказательство леммы 1 проводится стандартным путем. Отметим лишь, что при проверке включений $\operatorname{Ker} A \subset X_2$ и $\operatorname{Im} A \subset Y_1$ нужно воспользоваться обобщенной формулой интегрирования по частям [7], а при доказательстве обратного включения $Y_1 \subset \operatorname{Im} A$ — тем фактом, что линейная краевая задача

$$-\mathcal{L}u = y, \ x \in \Omega, \tag{10а}$$

$$\partial u/\partial \sigma = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{10б}$$

для всякого $y \in Y_1$ имеет решение $u \in X$ [7].

Если вместо всего пространства X рассматривается только его подпространство X_1 то в некоторых ситуациях можно построить функцию Грина для задачи (10а), (10б) или по крайней мере получить априорную оценку $\|u\| \leqslant \omega \|y\|$. В этих случаях $\|\hat{A}^{-1}\| \leqslant \omega$. В дальнейшем величину ω будем считать известной.

Определим линейные ограниченные проекторы P, $Q: Y \to Y$ по формулам: $Qy = \frac{1}{\mu}\int_\Omega y\,dx$, $P = I - Q$, где $\mu = \operatorname{mes}(\Omega)$, а I — единичный оператор в Y.

Лемма 2. *Предположим, что функция f имеет вид* $f(x, u, \xi) = g(x, u, \xi) + \varepsilon h(x, u, \xi)$, *где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а функция* $g, h: \Omega \times \mathbb{R}' \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $0 \leqslant m \leqslant N(N+3)/2$, *удовлетворяют условиям:*

а) g; $\partial g/\partial u$, $\partial g/\partial \xi$, h — *равномерно непрерывны в области:* $\Delta = \{(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m : |u| \leqslant R;\ |\xi| \leqslant R\}$; *более того, для всех* (x, u, ξ), $(x, v, \eta) \in \Delta$, $|g'_u(x, u, \xi)| \leqslant b$; $|g'_\xi(x, u, \xi)| \leqslant b$ $|h(x, u, \xi) - h(x, v, \eta)| \leqslant L(|u - v|^2 + |\xi - \eta|^2)^{1/2}$;

б) *существует такая функция* $\varphi \in L_1(\Omega)$, *что* $\int_\Omega \varphi(x)\,dx > 0$ *и* $g'_u(x, u, \xi) \geqslant \varphi(x)$ $\forall (x, u, \xi) \in \Delta$;

в) *выполняются соотношения*

$$|g'_u(x, u, \xi) - g'_u(x, v, \eta)| \leqslant l(|u - v|^2 + |\xi - \eta|^2)^{1/2},$$

$$|g'_\xi(x, u, \xi) - g'_\xi(x, v, \eta) \leqslant l|u - v|^2 + |\xi - \eta|^2)^{1/2}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *оператор* $G(u) := g(x, u, D^\alpha u): X \to Y$ *непрерывно дифференцируем в шаре* $S = \{u \in X : |||u||| < R\}$; *более того,* $\|G'(u)\| \leqslant \sqrt{2}\,b$, *следовательно,* $\|QG'(u)\| \leqslant \sqrt{2}b$, $\|PG'(u)\| \leqslant 2\sqrt{2}\,b$; *далее, оператор* $H(u) := h(x, u, D_u^\alpha): X \to Y$ *липшиц-непрерывен, причем* $\|H(u) - H(v)\| \leqslant L\,|||u - v|||$;

2) *сужение* $QG'(u)$ *на* X_2 *имеет в* S *равномерно ограниченный обратный:* $[QG'(u)]_{X_1} v = \frac{v}{\mu}\int_\Omega g'_u(x, u, D^\alpha u)\,dx$, $u \in S$; $v \in X_2$; *более того,* $\|QG' \times (u)]_{X_2}^{-1}\| \leqslant \gamma\mu$, *где* $\gamma = \left(\int_\Omega \varphi\,dx\right)^{-1}$;

3) $\| QG'(u) - QG'(v) \| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, l \, ||| u - v |||, \ u, v \in S.$

Доказательство. 1. Нетрудно видеть, что $G, H: S \subset X \to Y$ и для всех $u \in S$, $v \in X$ производная по Фреше $G'(u)$ определяется формулой

$$G'(u) v = g'_u(x, u, D^\alpha u) v + g'_\xi(x, u, D^\alpha_u) D^\alpha v, \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что $\| G'(u) v \|^2 = \int_\Omega | G'(u) v |^2 dx \leqslant 2b^2 \int_\Omega | v |^2 + | D^\alpha v |^2) dx \leqslant \leqslant 2b^2 ||| v |||^2$, следовательно, $\| G'(u) \| \leqslant \sqrt{2}\, b$. Далее,

$$\| H(u) - H(v) \| = \left(\int_\Omega | H(u) - H(v) |^2 dx \right)^{1/2} \leqslant L \left\{ \int_\Omega (| u - v |^2 + | D^\alpha u - - D^\alpha v |^2) dx \right\}^{1/2} \leqslant L \, ||| u - v |||.$$

2. Для любых $u \in S$, $v \in X_2$ имеем $[QG'(u)]_{X_2} v = \frac{v}{\mu} \int_\Omega g'_u(x, u, D^\alpha u)\, dx$. Поэтому в силу условия (б) $\| [QG'(u)]_{X_2} v \| = \frac{| v |}{\sqrt{\mu}} \left| \int_\Omega g'_u(x, u, D^\alpha u)\, dx \right| \geqslant \geqslant \frac{| v |}{\sqrt{\mu}} \int_\Omega \varphi dx = \frac{\gamma^{-1} | v |}{\sqrt{\mu}} = (\gamma\mu)^{-1} ||| v |||$. Таким образом, $\| [QG'(u)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma\mu$.

3. Согласно условию (в) $\| [QG'(u) - QG'(v)]\, w \| = \sqrt{\mu}\, | [QG'(u) - - QG'(v)]\, w | = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left| \int_\Omega [g'_u(x, u, D^\alpha u) - g'_u(x, v, D^\alpha v)]\, w dx + \int_\Omega [g'_\xi(x, u, D^\alpha u) - g_\xi(x, v, D^\alpha v)]\, D^\alpha w dx \right| \leqslant \frac{l}{\sqrt{\mu}} \int_\Omega (| u - w |^2 + | D^\alpha u - D^\alpha v |^2)^{1/2} \times \times (| w | + | D^\alpha w |)\, dx \leqslant \frac{l}{\sqrt{\mu}} \left\{ \int_\Omega (| u - v |^2 + | D^\alpha u - D^\alpha v |^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega (| w | + + | D^\alpha w |)^2 dx \right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, l \, ||| u - v |||\, ||| w |||$. Таким образом,

$$\| QG'(w) - QG'(v) \| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, l \, ||| u - v |||.$$

4. Итерационные методы решения нелинейных задач Неймана. Рассмотрим задачу (1), (2) в случае, когда $f = g + \varepsilon h$. Сначала применим нелинейный метод Зейделя. Заметим прежде всего, что в силу (6б) при $n \geqslant 1$ $PF(x_n) = F(x_n)$. Пусть $u_0 \in S$ — некоторое начальное приближение. Пусть k-е приближение x_k, $k \geqslant 0$, уже известно. Положим $u_k = w_k + v_k$, где $w_k \in X_1$, $v_k \in X_2$ и

$$f_0(x) := f(x, u_0, D^\alpha u_0) - \frac{1}{\mu} \int_\Omega f(u, u_0, D^\alpha u_0)\, dx; \quad f_k(x) := f(x, u_k, D^\alpha u_k), \quad k \geqslant 1,$$

$$g_0(x) := g(x, u_0, D^\alpha u_0) - \frac{1}{\mu} \int_\Omega g(x, u_0, D^\alpha u_0)\, dx.$$

Согласно нелинейному методу Зейделя (6а)—(6в) $w_{k+1} \in X_1$ определяется из следующей линейной задачи:

$$\mathcal{L} w_{k+1} = f_k(x), \quad x \in \Omega, \tag{12а}$$

$$\frac{\partial w_{k+1}}{\partial \sigma} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{12б}$$

а поправка $v_{k+1} \in X_2$ находится из скалярного уравнения

$$\int_\Omega f(x, w_{k+1}(x) + v_{k+1}, D^\alpha w_{k+1})\, dx = 0, \tag{12в}$$

наконец,

$$u_{k+1}(x) = w_{k+1}(x) + v_{k+1}. \tag{12г}$$

Заметим, что предложенный в работе [3] метод для решения задачи $-\Delta u + f(u) = g(x)$, $x \in \Omega$, $\partial u/\partial n = h(s)$, $s \in \partial\Omega$, является нелинейным методом Зейделя. Эффективность этого метода проверяется в работе [3] на многих конкретных примерах.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* а), б) *леммы* 1. *Более того, пусть*: $q := 2\sqrt{2}b(1 + \sqrt{2}b\gamma\mu)\,\omega < 1$ *и* $\delta < (1 - q)\, r$, *где* $r = R - |||\, u_0 \,|||$, $\delta := (1 + \sqrt{2}b\gamma\mu)\, \|\, \omega \,\|\, \mathfrak{L}u_0 + g_0 \,\| + \gamma \left| \int_\Omega g(x, u_0, D^\alpha u_0)\, dx \right|$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *процесс* (12а)—(12г) *сходится к некоторому решению задачи* (1), (2); *при этом справедлива оценка* (8).

Доказательсто. Согласно теореме 3 при достаточно малом ε задача (7) при $f = g + \varepsilon h$ имеет решение $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon$. При этом $|||\, w_k - w_\varepsilon \,||| \to 0$, $|\, v_k - v_\varepsilon \,| \to 0$, $|||\, u_k - u_\varepsilon \,||| \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку $\int_\Omega f_k(x)\, dx = 0$, то при $k \to \infty$ $\int_\Omega f(x, u_\varepsilon, D^\alpha u_\varepsilon)\, dx = 0$. Для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ в силу (12а), (12б) $\langle w_{k+1}, \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle f_k, \varphi \rangle$, следовательно, $\langle w_\varepsilon, \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle f(x, u_\varepsilon, D^\alpha u_\varepsilon), \varphi \rangle$. Так как $\langle u_\varepsilon, \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle w_\varepsilon, \mathcal{L}\varphi \rangle$, то u_ε является решением задачи (1), (2). Оценка (8) вытекает непосредственно из теоремы 3.

Рассмотрим метод Зейделя—Ньютона. Пусть $u_0 \in S$ задано, а при $k \geqslant 0$ k-е приближение u_k уже определено. Положим

$$u_k = w_k + v_k,\ w_k \in X_1,\ v_k \in X_2,\ f_k(x) := f(x, u_k, D^\alpha u_k) - \frac{1}{\mu} \int_\Omega f(x, u_k, D^\alpha u_k) \times$$

$$\times\, dx, \quad g_0(x) := g(x, u_0, D^\alpha u_0) - \frac{1}{\mu} \int_\Omega g(x, u_0, D^\alpha u_0)\, dx.$$

Согласно методу (9а)—(9г) $w_{k+1} \in X_1$ определяется из линейной задачи

$$\mathcal{L} w_{k+1} = f_k(x), \quad x \in \Omega, \tag{13а}$$

$$\partial w_{k+1}/\partial \sigma = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{13б}$$

а поправка $v_{k+1} \in X_2$ находится из соотношения

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\int_\Omega f(x, w_{k+1} + v_k, D^\alpha w_{k+1})\, dx}{\int_\Omega g'_u(x, w_{k+1} + v_k, D^\alpha w_{k+1})\, dx} \tag{13в}$$

и, наконец,

$$u_{k+1}(x) = w_{k+1}(x) + v_{k+1}. \tag{13г}$$

Из теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* а)—в) *леммы* 2. *Более того, предположим, что* $q := 8b^2\gamma\omega\mu + \gamma l\delta\sqrt{\mu/2} < 1$, $2\delta < (1 - q)\, r$, *где* $r = R - |||\, u_0 \,|||$, $\delta = \sqrt{2}b\gamma\mu\omega\, \|\, \mathfrak{L}u_0 + g_0 \,\| + \gamma \left| \int_\Omega g(x, u_0, D^\alpha u_0)\, dx \right|$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *процесс* (13а)—(13г) *сходится к некоторому решению задачи* (1), (2); *при этом справедлива оценка* (8).

В заключение заметим, что частный случай $a_{ij} = \delta_{ij}$ рассмотрен в [1—2, 4], а случай $a_{ij} = k(x)\,\delta_{ij}$ изучен в [3].

1. *Фам Ки Ань.* Об одном приближенном методе решения квазилинейных операторных уравнений // Докл. АН СССР.— 1980.— **250**, № 2.— С. 291—295.
2. *Fam Ki Anh.* On the Seidel — Newton method for solving quasilinear operator equations // Acta math. Viet.— 1982.— **7**, N **2**.— P. 111—126.
3. *Kannan R., Proskurowski W.* A numerical method for the monlinear Neumann problem // J Comput. Phys.— 1983.— **52**, N 1.— P. 105—121.
4. *Фонарев А. А.* О решении одной нелинейной задачи Неймана // Изв. вузов.— 1982.— № 6.— С. 60—62.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М. : Мир, 1975.— 558 с.
6. *Фам Ки Ань, Ву Зуй Тик.* Об одном итерационном методе решения общих периодических граничных задач // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 3.— С. 348—352.
7. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— 2-е изд., перераб.— М. : Наука, 1973.— 576 с.

Ханой. ун-т, Вьетнам

Получено 05.12.86