УДК 517.98

Н. В. Кравчук

О связи состояний фоннеймановских алгебр

Араки и Масуда [1] представили теорию некоммутативных L^p-пространств $L^p(\mathfrak{M}, \Omega)$ над произвольной (σ-конечной) алгеброй фон Неймана $\mathfrak{M}$ с выделенным циклическим и отделяющим вектором (короче, бициклическим вектором) Ω в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ее стандартного представления, установив изоморфизм пространства $L^p(\mathfrak{M}, \Omega)$ либо с подмножеством $\mathcal{H}$ (при $2 \leqslant p < \infty$), либо с пополнением $\mathcal{H}$ (при $1 \leqslant p < 2$) относительно подходящей $\|\cdot\|_p$-нормы. В частности, они установили, что изометричный изоморфизм пространства $L^1(\mathfrak{M}, \Omega)$ на преддвойственное пространство $\mathfrak{M}_*$ задан непрерывным расширением отображения.

$$\mathcal{H} \ni \psi \to \omega_{\psi,\Omega} \in \mathfrak{M}_*, \tag{1}$$

где $\omega_{\psi,\Omega}$ — линейная форма, определенная как

$$\omega_{\psi,\Omega}(A) = (\psi, A^*\Omega) \quad \forall A \in \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Из общей теории (см., например, [2, 3]) известно, что для всякой такой $\omega_{\psi,\Omega}$ существует полярное разложение вида

$$\omega_{\psi,\Omega}(A) = \Phi(AU) (\equiv U\Phi(A)), \quad A \in \mathfrak{M}, \tag{3}$$

где Φ — положительная нормальная линейная форма (будем называть ее состоянием) на $\mathfrak{M}$, а U — частичная изометрия в $\mathfrak{M}$ такая, что $U^*U = S(\Phi)$ — носителю состояния Φ [3]. Отметим, что для Φ существует представляющий вектор Φ_Φ в естественном положительном конусе $\mathcal{P}$, ассоциированном с парой $(\mathfrak{M}, \Omega)$, такой, что

$$\Phi(A) = (\Phi_\Phi, A^*\Phi_\Phi), \quad A \in \mathfrak{M}. \tag{4}$$

При этом известно, что $S(\Phi) = U^*U = S^{\mathfrak{M}}(\Phi_\Phi)$ — $\mathfrak{M}$-носителю вектора Φ_Φ [1, 2]. Поскольку $\Omega \in \mathcal{P}$, с ним по формуле (4) единственно ассоциировано нормальное состояние ω_0 (в (4) вместо Φ_Φ взят Ω). Предполагая затем, что $\psi \in \mathcal{P}$, обозначаем ассоциированное с ним подобным образом состояние на $\mathfrak{M}$ как ω ($\equiv \omega_\psi$). Тогда нетрудно видеть, что UU^* есть $\mathfrak{M}$-носитель вектора ψ (т. е. $= S^{\mathfrak{M}}(\psi)$). Действительно,

$$(UU^*\psi, A^*\Omega) = (AUU^*\psi, \Omega) = \Phi(AUU^*U) \text{ (по (3))} =$$
$$= \Phi(AU) = U\Phi(A) = \omega_{\psi,\Omega}(A) = (\psi, A^*\Omega) \quad \forall A \in \mathfrak{M},$$

так что утверждение следует из плотности $\mathfrak{M}\Omega$ в $\mathcal{H}$.

С другой стороны, векторы ψ и Ω определяют как форму $\omega_{\psi,\Omega}$ по (2), так и состояния ω и ω_0 соответственно по (4). Поэтому существование связи между формой $\omega_{\psi,\Omega}$ и состояниями ω и ω_0 кажется вполне естественным и мы ее используем для исследования соотношения между самими ω и ω_0 с помощью приемов из [1]. Но сначала отметим, что для состояний $\omega, \omega_0 \in \mathfrak{M}^+$ можно ввести относительный модулярный оператор Δ_{ω,ω_0} — положительный самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$, определенный как абсолютное значение в полярном разложении оператора

$$S_{\omega,\omega_0}: A\Omega \to A^*\psi, \quad A \in \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Модулярный оператор, ассоциированный с Ω, обозначаем как Δ_0 (подробнее свойства этих объектов описаны в [1, 2]). Согласно теории пространств L^1 из [1] получаем, что форме $\omega_{\psi,\Omega}$ на $\mathfrak{M}$ соответствует оператор $\Delta_{\omega,\omega_0}^{1/2}\, \Delta_0^{1/2}$ на $\mathcal{H}$, тогда как ее абсолютному значению Φ (из (3)) — абсолютное значение этого оператора, т. е. $(\Delta_0^{1/2}\Delta_{\omega,\omega_0}\Delta_0^{1/2})^{1/2}$ аналогично построениям из [4], поскольку модулярный оператор нормального состояния на произвольной алгебре фон Неймана играет роль матрицы плотности нормального состояния на алгебре $B(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$. Поэтому можно также попытаться обобщить теорему Радона—Никодима из [4], доказанную для этого последнего случая, на общую алгебру фон Неймана. И действительно, из отмеченного выше операторного представления, воспользовавшись (как в работе [1]) операторной монотонностью функции квадратный корень, из $\omega_1 \leqslant \omega_2$ (где $\omega_i = \omega_{\psi_i}$, $i = 1, 2,$ — ассоциированное с $\psi_i \in \mathcal{P}$ по (4)), следует, что и $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ (где Φ_i, $i = 1, 2,$— состояние, ассоциированное по (4) с формой $(\omega_{\psi_i,\Omega})$, $i = 1, 2$). Точно так же можно перенести все построения из [4], но нам представляется более уместным вывести их более простым приемом, используя представления состояний в разных положительных конусах, теорему типа Радона—Никодима, не зависящим от пространства способом. В частности, используя замечание 5.6 из [1], представитель ψ^0 состояния ω в конусах $V^0_{(\Omega)}$ выражается как $JU^*\psi$, где ψ выражает его же в $\mathcal{P}_{(\Omega)}$. Используя то, что из $A \in \mathfrak{M}$ следует $JAJ \in \mathfrak{M}'$, что $J\psi = \psi$ и $J^2 = 1$, получаем цепочку тождеств

$$(JU^*\psi,\ A^*JU^*\psi) = (JU^*J\psi,\ A^*JU^*J\psi) = (A\psi,\ JUJJU^*J\psi) =$$
$$= (A\psi,\ JUU^*\psi) = (\psi,\ A^*J\psi) = (\psi,\ A^*\psi) = \omega(A).$$

Но в то же время $(U^*\psi,\ A^*\Omega) = (\psi, UA^*\Omega) = \Phi(A)$, которое при положительных A всегда положительно, а также известно [2], что $U\psi \in (V^0_{(\Omega)})' \equiv V^{1/2}_{(\Omega)}$. Следовательно, $\psi^{(0)} = JU^*\Psi \in JV^{1/2}_{(\Omega)} \equiv V^0_{(\Omega)}$ (как в доказательстве леммы 5.5 в [1]). Вводя операцию α_B на $\mathfrak{M}_*$ как [3]

$$\alpha_B\omega(A) = \omega(B^*AB), \quad A \in \mathfrak{M}, \tag{6}$$

и используя форму (2), точнее ее абсолютное значение (3), получаем критерий связи ω и ω_0.

Теорема. *Состояние ω имеет вид $\alpha_B\omega_0$ (6) для единственного $B \in \mathfrak{M}^+$ в том и только в том случае, когда состояние Φ (3) подчинено ω_0 (в обычном порядке).*

Доказательство. При предположении, что $\omega = \alpha_B\omega_0$, $B \in \mathfrak{M}^+$, его представляющим вектором $\psi^{(0)}$ в $V^{(0)}_{(\Omega)}$ будет как раз $B\Omega$. Поэтому состояние

$$\Phi(A) = (J\psi^{(0)},\ A^*\Omega) \tag{7}$$

представляется как $(JB\Omega,\ A^*\Omega) = (JBJ\Omega,\ A^*\Omega)$, и из неравенства Шварца получаем $\forall A \in \mathfrak{M}^+$:

$$\Phi(A) \leqslant \| JBJ \| (\Omega,\ A^*\Omega) = \| B \| \omega_0(A), \tag{8}$$

откуда по определению $\Phi \leqslant \omega_0$ [2, 3].

Теперь обратно, допустим, что $\Phi \leqslant \omega_0$. Тогда известно, что существует коновская производная Радона—Никодима $(\mathcal{D}\Phi : \mathcal{D}\omega_0)_t$, $t \in \mathbb{R}$ (см. [1], приложение В, или [2], § 2.7.3) и ее голоморфное продолжение в точку $-i/2$, являющееся оператором из $\mathfrak{M}$; обозначим его как C. Тогда представляющим вектором Φ в $\mathcal{P}_{(\Omega)}$ будет $C\Omega$ $(=CJ\Omega)$ [1] и, таким образом, $\Phi(A) = (JC\Omega,\ A^*JC\Omega)$. Снова используя то, что из $A^* \in \mathfrak{M}$ следует $JA^*J \in \mathfrak{M}'$, получаем продолжение этого равенства

$$\Phi(A) = (JC^*JJCJ\Omega,\ A^*\Omega) = (JC^*C\Omega,\ A^*\Omega). \tag{9}$$

Сравнивая (7) и (9), получаем (использовав опять плотность $\mathfrak{M}\Omega$ в $\mathcal{H}$) $\psi^{(0)} = C^*C\Omega$, так что из соотношения $B \equiv C^*C \in \mathfrak{M}^+$ имеем $\omega = \alpha_B\omega_0$.

1. *Araki H., Masuda T.* Positive cones and L_p-spaces for von Neumann algebras // Publs Res. Inst. Math. Sci.— 1982.— 18.— P. 339—411.
2. *Брателли У., Робинсон Д. В.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М. : Мир, 1983.— 511 с.

3. *Sakai S.* C^*-algebras and W^*-algebras.— Berlin etc.: Springer, 1971.— 256 p.
4. *Pedersen G. K., Takesaki M.* The operator equation $THT = K$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— **36**.— P. 311—312.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.06.86