УДК 517.9

В. З. Мешков

Ограничения на скорость убывания решений эллиптических уравнений в неограниченных областях

В обзоре [1], посвященном проблемам комплексного анализа, была поставлена следующая задача (проблема 3.27, с. 494):

Пусть G — неограниченная связная область в евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$. Существует ли положительная непрерывная функция $\delta(|x|)$ такая, что справедливо следующее утверждение?

Если $u(x)$ гармонична в G и удовлетворяет там неравенству $|u(x)| < \delta(|x|)$, то $u \equiv 0$ в G.

В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос, причем в гораздо более общей ситуации (см. ниже теорему 1).

Всюду в дальнейшем через $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ будем обозначать эллиптический оператор в области G. Относительно коэффициентов $a_\alpha(x)$ будем предполагать, что $a_\alpha(x)$ непрерывны в G, если $|\alpha| = m$ и $a_\alpha(x)$ измеримы и локально ограничены в G, если $|\alpha| < m$. Кроме того, дополнительно предположим, что для оператора $P(x, D)$ выполняется следующее условие единственности:

Любое решение уравнения $P(x, D) u = 0$, принадлежащее пространству Соболева $H_m^{\mathrm{loc}}(G)$ и обращающееся в нуль на непустом открытом подмножестве области G, тождественно равно нулю в G.

При этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует положительная непрерывная функция $\delta(|x|)$ такая, что любое решение уравнения $P(x, D) u = 0$, принадлежащее $H_m^{\mathrm{loc}}(G)$ и удовлетворяющее неравенству*

$$|u(x)| < \delta(|x|), \quad x \in G, \tag{1}$$

тождественно равно нулю в G.

Замечание 1. Известно, что решение эллиптического уравнения $P(x, D) u = 0$, априори принадлежащее $H_m^{\mathrm{loc}}(G)$, на самом деле будет непрерывным, (см., например, [2, с. 249—251]). Это обстоятельство делает осмысленным неравенство (1).

Замечание 2. По поводу выполнения условия единственности, налагаемого на $P(x, D)$ см. [3] (§ 8.9). В частности, отметим, что для эллиптических операторов второго порядка это условие выполняется, если коэффициенты при старших производных локально удовлетворяют условию Липшица, а остальные коэффициенты измеримы и локально ограничены. В то же время построенный в работе [4] пример эллиптического уравнения четвертого порядка с C^∞-коэффициентами, имеющего нетривиальное финитное решение, показывает, что условие единственности не всегда выполняется для эллиптических операторов.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые предварительные рассуждения. Отметим сначала, что для оператора $P(x, D)$ выполняются следующие априорные оценки, (см., например, [5, с. 138], теорема 15.1″):

Пусть G_1 — компактная подобласть области G, а K — компакт, лежащий в G_1, тогда для любой функции $v \in H_m^{\mathrm{loc}}(G)$ выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_K |D^\alpha v|^2 dx \leqslant C \int_{G_1} (|P(x, D) v|^2 + |v|^2) dx, \tag{2}$$

где постоянная C не зависит от $v \in H_m^{\mathrm{loc}}(G)$.

В случае, когда v удовлетворяет уравнению $P(x, D) v = 0$, отсюда получаем неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_K |D^\alpha v|^2 dx \leqslant C \int_{G_1} |v|^2 dx. \tag{3}$$

Обозначим через $H(P, G)$ локально выпуклое пространство, состоящее из всех решений уравнения $P(x, D)u = 0$ в области G, принадлежащих $H_m^{\mathrm{loc}}(G)$. Топология в этом пространстве вводится с помощью системы полунорм

$$q_K(u) = \Big(\int_K |u|^2 dx\Big)^{1/2},$$

где K пробегает все компакты, лежащие в области G.

Лемма 1. *Пространство $H(P, G)$ является монтелевским, т. е. из любой ограниченной последовательности $u_n \in H(P, G)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Лемма 1 с помощью стандартных рассуждений очевидным образом вытекает из априорной оценки (3) и теорем о компактности вложений соболевских пространств.

Лемма 2. *Пусть K_1, K_2 — компакты, лежащие в области G, причем K_1 имеет непустую внутренность. Тогда для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любого решения уравнения $P(x, D)u = 0$, $u \in H(P, G)$, удовлетворяющего дополнительным условиям*

$$|u(x)| \leqslant 1, \quad x \in G; \quad |u(x)| \leqslant \delta, \quad x \in K_1, \tag{4}$$

выполняется неравенство

$$\int_{K_2} |u(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через V подмножество в $H(P, G)$, выделяемое неравенством (4). Ясно, что V ограничено в $H(P, G)$. Предположим теперь, что лемма 2 не верна. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $u_n \in V$ такие, что $|u_n(x)| < 2^{-n}$, $x \in K_1$, а

$$\int_{K_2} |u_n(x)|^2 dx \geqslant \varepsilon_0.$$

В силу леммы 1 выберем теперь из u_n сходящуюся подпоследовательность и обозначим через u_0 ее предел. Из оценки (3) вытекает, что $u_0 \in H_m^{\mathrm{loc}}(G)$ и удовлетворяет уравнению $P(x, D)u_0 = 0$. Кроме того, ясно, что $u_0(x) = 0$, если $x \in K_1$. Поэтому в силу условия единственности $u_0(x) \equiv 0$ в G. В то же время

$$\int_{K_2} |u_0(x)|^2 dx \geqslant \varepsilon_0.$$

Отсюда получаем противоречие.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что область G содержит начало координат. Пусть $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ обозначает набор замкнутых шаров положительных радиусов, лежащих в области G таких, что B расположен в шаровом слое $n + 1/4 \leqslant |x| \leqslant n + 3/4$. Пользуясь леммой 2, при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ выберем число δ_n в интервале $(0, 1)$ так, чтобы для любой функции $u \in H(P, G)$, удовлетворяющей дополнительным условиям $|u(x)| \leqslant 1$, $x \in G$; $|u(x)| \leqslant \delta_n$, $x \in B_n$, выполнялось неравенство

$$\int_{B_0} |u(x)|^2 dx \leqslant 2^{-n}. \tag{5}$$

Построим теперь неотрицательную непрерывную функцию $\delta(|x|)$ так, чтобы $\delta(|x|) = \delta_n$, если $x \in B_n$ и $\delta(|x|) \leqslant 1$, если $x \in R^n$. Покажем теперь, что $\delta(|x|)$ является той функцией, о существовании которой утверждается в теореме 1. В самом деле, пусть функция u, принадлежащая $H_m^{\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяет в G уравнению $P(x, D)u = 0$ и оценке $|u(x)| <$

$< \delta(|x|)$. Тогда из (5) вытекает, что

$$\int_{B_0} |u(x)|^2 dx = 0.$$

В силу условия единственности отсюда получаем $u(x) \equiv 0$ в G, что и требовалось доказать.

1. *Barth K. F., Brannan D. A., Hayman W. K.*, Research problems in complex analysis // Bull. London Math. Soc.— 1984.— **16**, N 5.— P. 490—517.
2. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1966.— 351 с.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М. : Мир, 1965.— 379 с.
4. *Plis A.* A smooth linear differential equation without any solution in sphere // Communs Pure and Appl. Math.— 1961.— **14**.— P. 599—617.
5. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 205 с.

Воронеж. ун-т Получено 13.01.86