УДК 512.546

И. В. Протасов

О числе Суслина пространства подгрупп локально компактной группы

Пусть G — топологическая группа, $\exp G$ и $\mathfrak{L}(G)$ — пространства всех ее замкнутых подмножеств и замкнутых подгрупп, снабженные топологией Вьеториса. Напомним, что число Суслина $c(X)$ топологического пространства X — это супремум мощностей дизъюнктных систем открытых множеств из X. Если группа G бесконечна и локально компактна, а H — ее открытая σ-компактная подгруппа, то, как известно, $c(G) = \max\{\aleph_0, |G:H|\}$. Отсюда следует, что $c(G^n) = c(G)$ для любого натурального n. Обозначим через $\exp_n G$ подпространство всех непустых не более чем n-элементных подмножеств из G. Ясно, что $\exp_n G$ — непрерывный образ G^n и $(\exp G)\setminus\{\varnothing\} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \exp_n G}$. Поэтому $c(\exp G) = c(G)$. Равенство $c(\mathfrak{L}(G)) = c(G)$, вообще говоря, не верно. В статье получены оценки $c(\mathfrak{L}(G))$ через $c(G)$ в случае локально компактной группы G (теорема 1), а также приведены достаточные условия на группу G, при которых $c(\mathfrak{L}(G)) = c(G)$ (теорема 2). В частности, доказано, что если группа G компактна, то $c(\mathfrak{L}(G))$ счетно. Далее подгруппами топологической группы называются лишь замкнутые подгруппы. Открытую предбазу топологии Вьеториса на $\mathfrak{L}(G)$ образуют множества $D_1(u) = \{X \in \mathfrak{L}(G) : X \subseteq U\}$, $D_2(V) = \{X \in \mathfrak{L}(G) : X \cap V \neq \varnothing\}$, где U, V пробегают все открытые подмножества группы G.

Теорема 1. *Если G — бесконечная локально компактная группа, то $c(G) \leqslant c(\mathfrak{L}(G)) \leqslant 2^{c(G)}$.*

Доказательство начнем с левого неравенства. Если $c(G) = \aleph_0$, то $c(\mathfrak{L}(G)) \geqslant \aleph_0$, так как $\mathfrak{L}(G)$ — бесконечное пространство. Пусть $c(G) > \aleph_0$, H — открытая σ-компактная подгруппа из G, $G = \bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha H$ — разложение группы G на смежные классы по H. Ясно, что $c(G) = |G:H| = I$. Обозначим через $\langle x_\alpha\rangle$ наименьшую замкнутую подгруппу из G, содержащую элемент Cx_α, и положим $\mathfrak{A}_\alpha = D_1(\langle x_\alpha\rangle H) \cap D_2(x_\alpha H)$ для каждого $\alpha \in I$. Покажем, что каждое открытое в $\mathfrak{L}(G)$ подмножество $\mathfrak{A}_\alpha$ пересекается с не более чем счетным числом подмножеств $\mathfrak{A}_\beta$, $\beta \in I$. Пусть $K \in \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$. Так как $K \cap x_\beta H \neq \varnothing$, то $x_\beta H \subseteq KH$. Поскольку $K \subseteq \langle x_\alpha \rangle H$, то $KH \subseteq \langle x_\alpha \rangle H$. Значит, $x_\beta H \subseteq \langle x_\alpha \rangle H$. Заметим, что подмножество $\langle x_\alpha \rangle H$ распадается на не более чем счетное число смежных классов по H. Следовательно, индекс β может принимать не более чем счетное число значений. Пользуясь леммой Цорна, выделим из системы открытых подмножеств $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$, $\alpha \in I$, максимальную дизъюнктную подсистему $\{\mathfrak{A}_\gamma\}$, $\gamma \in J$. Так как каждое подмножество $\mathfrak{A}_\gamma$ пересекается с не более чем счетным числом подмножеств $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$, $\alpha \in I$, и $|I| > \aleph_0$, то $|J| = |I|$. Значит, $c(\mathfrak{L}(G)) \geqslant |J| = |I| = c(G)$.

Правое неравенство будем доказывать от противного: $c(\mathfrak{L}(G)) > 2^{c(G)}$. Возьмем дизъюнктную систему $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$, $\alpha \in I$, непустых открытых множеств из $\mathfrak{L}(G)$ мощности $|I| > 2^{c(G)}$. Поскольку $|I| > \aleph_0$, можно считать, что

$$\mathfrak{A}_\alpha = D_1(U_\alpha) \cap D_2(V_{1\alpha}) \cap \ldots \cap D_2(V_{n\alpha}),$$

где n — фиксированное натуральное число, U_α, $V_{1\alpha}$, ..., $V_{n\alpha}$ — открытые подмножества из G. Так как пространство локально компактной группы G нормально, в $\mathfrak{A}_\alpha$ можно вписать непустое открытое множество

$$\mathfrak{A}'_\alpha = D_1(U'_\alpha) \cap D_2(V'_{1\alpha}) \cap \ldots \cap D_2(V'_{n\alpha}),$$

где $\overline{U'_\alpha} \subseteq U_\alpha$, $\overline{V'_{1\alpha}} \subseteq V_{1\alpha}, \ldots, \overline{V'_{n\alpha}} \subseteq V_{n\alpha}$, $\overline{V'_{1\alpha}}, \ldots, \overline{V'_{n\alpha}}$ — компакты.

Положим $\mathfrak{D}_\alpha = \{X \in \exp G : X \subseteq U'_\alpha,\ X \cap V'_{1\alpha}, \ldots, X \cap V'_{n\alpha} \neq \varnothing\}$. Тогда $\mathfrak{D}_\alpha$ открыто в пространстве $\exp G$ и $\mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{L}(G) = \mathfrak{A}'_\alpha$. Пусть e — единица группы G, $\exp'_{n+1} G = \{X \in \exp G : e \in X, |X| \leqslant n+1\}$. Если Y — подмножество из G, то через Y^m обозначим подмножество $\{z \in G : z = y_1 \ldots y_m,\ y_1, \ldots, y_m \in Y\}$.

Допустим, что для любых различных $\alpha, \beta \in I$ найдется такое натуральное число $m(\alpha, \beta)$, что $m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha)$ и $(X \cup X^{-1})^{m(\alpha,\beta)} \notin \mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta$ для любого $X \in \mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta \cap \exp'_{n+1} G$. Таким образом, каждое двухэлементное подмножество $\{\alpha, \beta\}$ из I окрашено в цвет $m(\alpha, \beta)$. Поскольку $|I| > 2^{c(G)}$ и $c(G) \geqslant \aleph_0$, по теореме Эрдеша—Радо [1, с. 32] найдутся такие подмножество $J \subseteq I$ и натуральное число m, что $|J| > c(G)$ и $m(\alpha, \beta) = m$ для любых различных индексов $\alpha, \beta \in J$.

Рассмотрим подмножество $\mathfrak{M} \subseteq \exp G \times \exp G$, состоящее из векторов $(X, (X \cup X^{-1})^m)$, где $X \in \exp'_{n+1} G$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{M}$ — непрерывный образ подпространства $\exp'_{n+1} G$, следовательно, $c(\mathfrak{M}) = c(\exp'_{n+1} G) = c(G)$. Обозначим через $\mathfrak{D}'_\alpha$ открытое в $\mathfrak{M}$ подмножество вида $(\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\alpha) \cap \mathfrak{M}$. Непустота $\mathfrak{D}'_\alpha$ вытекает из того, что каждое $\mathfrak{D}_\alpha$ по условию содержит некоторую подгруппу, топологически порожденную не более чем n элементами. Так как $|J| > c(\mathfrak{M})$, найдутся различные индексы $\alpha, \beta \in J$, такие, что $\mathfrak{D}'_\alpha \cap \mathfrak{D}'_\beta \neq \varnothing$. Возьмем вектор $(X, (X \cup X^{-1})^m)$ из $\mathfrak{D}'_\alpha \cap \mathfrak{D}'_\beta$. Тогда $X \in \mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta \cap \exp'_{n+1} G$ и $(X \cup X^{-1})^m \in \mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta$. Последнее противоречит выбору m.

Итак, мы доказали существование таких различных индексов $\alpha, \beta \in J$, что для любого натурального числа k найдется подмножество $X_k \in \mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta \cap \exp'_{n+1} G$ такое, что $(X_k \cup X_k^{-1})^k \in \mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta$. Рассмотрим последовательность замкнутых подмножеств $\{X_k\}$ и, пользуясь леммой 1.1 из работы [2], выделим из нее поднаправленность $\{X_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, S-сходящуюся к некоторому замкнутому подмножеству X. Это означает, что

1) для любого $x \in X$ и любой окрестности U элемента x найдется такое $\gamma' \in \Gamma$, что $X_\gamma \cap U \neq \varnothing$ для всех $\gamma > \gamma'$;

2) для любого $y \notin X$ найдутся такие окрестность V элемента y и индекс $\gamma'' \in \Gamma$, что $X_\gamma \cap V = \varnothing$ для всех $\gamma > \gamma''$.

Так как $X_k \in \exp'_{n+1} G$ для любого k, то $X \in \exp'_{n+1} G$. Обозначим через $\langle X \rangle$ наименьшую замкнутую подгруппу из G, содержащую подмножество X. Покажем, что $\langle X\rangle\in\mathfrak{A}_\alpha\cap\mathfrak{A}_\beta$ и, тем самым, получим противоречие с определением системы $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$, $\alpha\in I$.

Так как $X_k\cap V'_{i\alpha}\neq\varnothing$, $X_k\cap V'_{i\beta}\neq\varnothing$ и $\overline{V'_{i\alpha}}, \overline{V'_{i\beta}}$ — компактны для всех $i=1,\ldots,n$, то $X\cap\overline{V'_{i\alpha}}\neq\varnothing$, $X\cap\overline{V'_{i\beta}}\neq\varnothing$. Поскольку $\overline{V'_{i\alpha}}\subseteq V^i_{i\alpha}$, $\overline{V'_{i\beta}}\subseteq V_{i\beta}$, получаем

$$\langle X\rangle\in D_2(V_{1\alpha})\cap\ldots\cap D_2(V_{n\alpha})\cap D_2(V_{1\beta})\cap\ldots\cap D_2(V_{n\beta}).$$

Ввиду условий $\langle X\rangle=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}(X\cup X^{-1})^k}$, $\overline{U'_\alpha}\subseteq U_\alpha$, $\overline{U'_\beta}\subseteq U_\beta$, осталось показать, что $(X\cup X^{-1})^k\subseteq\overline{U'_\alpha}\cap\overline{U'_\beta}$ для любого натурального k. Предположим, что это не так и $(X\cup X^{-1})^s\subseteq\overline{U'_\alpha}$ для некоторого натурального s. Выберем такие элементы $x_1,\ldots,x_s\in X\cup X^{-1}$ и их окрестности $W_1,\ldots,W_s$, что $W_1\ldots W_s\cap\overline{U'_\alpha}\neq\varnothing$. По определению X можно выбрать такое $k>s$, что $(X_k\cup X_k^{-1})\cap W_1\neq\varnothing,\ldots,(X_k\cup X_k^{-1})\cap W_s\neq\varnothing$. Пусть $x'_1\in(X_k\cup X_k^{-1})\cap W_1,\ldots,x'_s\in(X_k\cup X_k^{-1})\cap W_s$. Тогда $x'_1\ldots x'_s\in W_1\ldots W_s$ и, значит, $x'_1\ldots x'_s\notin\overline{U'_\alpha}$. Далее, $x'_1\ldots x'_s=x'_1\ldots x'_s e^{k-s}\in(X_k\cup X_k^{-1})^k$. Значит, $(X_k\cup X_k^{-1})^k\not\subseteq\overline{U'_\alpha}$, что противоречит условию $(X_k\cup X_k^{-1})^k\in\mathfrak{O}_\alpha$. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть G — бесконечная компактная метризуемая группа. Компактное пространство $\mathfrak{L}(G)$ также метризуемо, например, метрикой Хаусдорфа. Поэтому $c(\mathfrak{L}(G))=\aleph_0$ и $c(\mathfrak{L}(G))=c(G)$. С другой стороны, пусть R — аддитивная группа вещественных чисел с естественной топологией. Любая собственная подгруппа из R циклична и, как легко видеть, изолирована в пространстве $\mathfrak{L}(R)$. Значит, $c(\mathfrak{L}(R))=|R|$ и $c(\mathfrak{L}(R))=2^{c(R)}$.

Для доказательства теоремы 2 понадобятся две леммы, представляющие, видимо, и самостоятельный интерес. Лемма 2 была высказана в виде гипотезы Ю. В. Цыбенко.

Лемма 1. *Пусть G — компактная группа, X — ее подгруппа. Следующие подмножества образуют базу окрестностей подгруппы X в $\mathfrak{L}(G)$:*

$$\mathfrak{A}_X(U,N,x_1,\ldots,x_n)=\{u^{-1}Yu: Y\in\mathfrak{L}(G),\ Y\subseteq XN,\ Y\cap x_1U\neq\varnothing,\ldots$$
$$\ldots,Y\cap x_nU\neq\varnothing\},$$

где U, пробегает окрестности единицы группы G, N — такие нормальные делители группы G, что G/N — группа Ли, $x_1,\ldots,x_n$ — произвольные элементы из X.

Доказательство. Вначале убедимся, что $\mathfrak{A}_X(U,N,x_1,\ldots,x_n)$ — окрестность подгруппы X. Подберем такие окрестности U_1, V единицы группы G, что $U_1\subseteq U$, $U_1x_iVU_1^{-1}\subseteq x_iU$ для всех $i=1,\ldots,n$. Так как G/N — группа Ли, по теореме Монтгомери—Янга [3, с. 94] найдется такая окрестность W единицы группы G, что для любой подгруппы $Z\subseteq XNW$ существует такое $u\in U_1$, что $uZu^{-1}\subseteq XN$. Значит, $Z=u^{-1}Yu$, где $Y\subseteq XN$. Если $Z\cap x_iV\neq\varnothing$, то в силу выбора окрестностей U_1, V $Y\cap x_iU\neq\varnothing$. Поэтому окрестность $D_1(XNW)\cap D_2(x_1V)\cap\ldots\cap D_2(x_nV)$ подгруппы X содержится в $\mathfrak{A}_X(U,N,x_1,\ldots,x_n)$.

Пусть теперь задана произвольная окрестность $D_1(W)\cap D_2(V_1)\cap\ldots\cap D_2(V_n)$ подгруппы X. Возмем элементы $x_1\in X\cap V_1,\ldots,x_n\in X\cap V_n$. Подберем окрестность U единицы и нормальный делитель N так, чтобы G/N была группой Ли, $U^{-1}XNU\subseteq W$ и $U^{-1}x_iU^2\subseteq V_i$ для всех $i=1,\ldots,n$. Тогда $\mathfrak{A}_X(U,N,x_1,\ldots,x_n)\subseteq D_1(W)\cap D_2(V_1)\cap\ldots\cap D_2(V_n)$.

Лемма 2. *Пусть φ — непрерывный гомоморфизм компактной группы G на группу H. Отображение $\Phi:\mathfrak{L}(G)\to\mathfrak{L}(H)$, заданное правилом $\Phi(X)=\varphi(X)$ для любой подгруппы $X\in\mathfrak{L}(G)$, непрерывно и открыто.*

Доказательство. Непрерывность отображения Φ следует непосредственно из определения топологии Вьеториса. Покажем открытость Φ. Пусть $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_X (U, N, x_1, \ldots, x_n)$ — окрестность подгруппы X из $\mathfrak{L}(G)$ (см. лемму 1). В силу непрерывности и открытости гомоморфизма φ найдется такая окрестность V единицы группы G, что $V \subseteq U$ и $\varphi(XN \cap \cap U) \supseteq \varphi(V) \cap \varphi(XN)$. Рассмотрим окрестность $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_{\Phi(X)} (\varphi(V), \varphi(N), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ подгруппы $\Phi(X)$ в $\mathfrak{L}(H)$ и докажем, что $\Phi(\mathfrak{A}_1) \supseteq \supseteq \mathfrak{A}_2$. Если $M \in \mathfrak{A}_2$, то $M = \varphi(v)^{-1} K \varphi(v)$, $v \in V$, $K \subseteq \varphi(XN)$, $K \subseteq \supseteq \varphi(x_2) \varphi(V) \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через K' полный прообраз подгруппы K в XN, $M' = v^{-1}K'v$. Тогда $\Phi(M') = M$. Покажем, что $M' \in \mathfrak{A}_1$. Так как $K' \subseteq XN$ и $V \subseteq U$, достаточно убедиться лишь в том, что $K' \cap x_iU \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$. Из того, что $K \subseteq \varphi(XN)$ и $K \cap \varphi(x_i) \varphi(V) \neq \varnothing$, следует $\varphi(k') = \varphi(x_i)\varphi(v)$ для некоторых $k' \in K'$, $v \in V$. Поскольку $\varphi(v) \in \varphi(XN)$, в силу выбора V найдется такое $u \in U \cap XN$, что $\varphi(v) = \varphi(u)$. Тогда $\varphi(k') = \varphi(x_i)\varphi(u)$ и $k'g = x_iu$, где $g \in \ker \varphi$. Так как k', x_i, $u \in XN$, то $g \in XN$. Следовательно, $k'g \in K'$ и $K' \cap x_iU \neq \neq \varnothing$. Напомним, что топологическая группа G называется индуктивно компактной, если любой компакт из G содержится в компактной подгруппе.

Теорема 2. *Если локально компактная группа G бесконечна и индуктивно компактна, то $c(\mathfrak{L}(G)) = c(G)$.*

Доказательство. Предположим вначале, что группа G компактна и докажем, что $c(\mathfrak{L}(G)) = \aleph_0$. Если вес группы G $\omega(G) = \aleph_0$, то G метризуема и по замечанию 1 $c(\mathfrak{L}(G)) = \aleph_0$. Пусть $\omega(G) = \aleph_1$, ω_1 — первый несчетный ординал. Выберем вполне упорядоченную по убыванию систему $\{N_\alpha\}$, $\alpha < \omega_1$, нормальных делителей группы G таких, что $\bigcap\limits_{\alpha<\omega_1} N_\alpha = \{e\}$ и группы $G_\alpha = G/N_\alpha$ метризуемы для любого $\alpha < \omega_1$. Тогда $G = \varprojlim \{G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, \alpha < \beta < \omega_1\}$, где φ_α^β — гомоморфизмы из G_β на G_α. Обозначим через Φ_α^β отображение $\mathfrak{L}(G_\beta) \to \mathfrak{L}(G_\alpha)$, индуцированное гомоморфизмом φ_α^β. По лемме 2 отображение Φ_α^β непрерывно и открыто. Стандартно проверяется, что $\mathfrak{L}(G)$ гомеоморфно $\varprojlim \{\mathfrak{L}(G_\alpha), \Phi_\alpha^\beta, \alpha<\beta<\omega_1\}$. Так как $\mathfrak{L}(G_\alpha)$ — метризуемые компакты, а проекции Φ_α^β открыты, по теореме Е. В. Щепина [4] $\mathfrak{L}(G)$ — пространство Дугунджи. Следовательно, $c(\mathfrak{L}(G)) = \aleph_0$. Пусть G — компактная группа и $\omega(G) > \aleph_1$. Допустим, что $c(\mathfrak{L}(G)) > \aleph_0$ и выберем такую систему открытых в $\mathfrak{L}(G)$ подмножеств $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$, $\alpha \in I$, что $|I| = \aleph_1$, $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha \cap \bar{\mathfrak{A}}_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Зафиксируем пару различных индексов $\alpha, \beta \in I$. Так как G аппроксимируется метризуемыми группами, используя условие $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha \cap \bar{\mathfrak{A}}_\beta = \varnothing$, компактность $\mathfrak{L}(G)$ и лемму 2, подберем такой нормальный делитель $N_{\alpha,\beta}$, что группа $G/N_{\alpha,\beta}$ метризуема и $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathfrak{A}_\alpha) \cap \Phi_{\alpha,\beta}(\mathfrak{A}_\beta) = \varnothing$, где $\Phi_{\alpha,\beta}$ — отображение $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(G/N_{\alpha,\beta})$, индуцированное гомоморфизмом $G \to G/N_{\alpha,\beta}$. Положим $N = \bigcap\limits_{\alpha,\beta} N_{\alpha,\beta}$, Φ — естественное отображение $\mathfrak{L}(G) \to \to \mathfrak{L}(G/N)$. Ясно, что $\omega(G/N) \leqslant \aleph_1$ и по лемме 2 $\{\Phi(\mathfrak{A}_\alpha)\}$, $\alpha \in I$ — дизъюнктная система открытых подмножеств из $\mathfrak{L}(G/N)$. Получили противоречие с тем, что по доказанному выше $c(\mathfrak{L}(G/N)) = \aleph_0$.

Рассмотрим общий случай. Ввиду индуктивной компактности группа G содержит открытую компактную подгруппу H. Требуется показать, что $c(\mathfrak{L}(G)) = \max\{\aleph_0, \tau\}$, где $\tau = |G : H|$. Если кардинал τ конечен, то группа G компактна и все доказано. Пусть τ — бесконечный кардинал, $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} x_\alpha H$ — разложение группы G на смежные классы по подгруппе H. Обозначим через J множество всех конечных подмножеств множества $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$. Ясно, что $|J| = \tau$. Возьмем произвольный элемент $F \in J$ и через G_F обозначим подгруппу из G, топологически порожденную подгруппой H и подмножеством F. Из индуктивной компактности группы G следует, что G_F — компактная группа и $\mathfrak{L}(G) = \overline{\bigcup\limits_{F \in J} \mathfrak{L}(G_F)}$. Поскольку $c(\mathfrak{L}(G_F)) = \aleph_0$ для любого $F \in J$ и $|J| = \tau$, то $c(\mathfrak{L}(G)) \leqslant \tau$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 следует, что если G — компактная группа и $\omega(G) \leqslant \aleph_1$, то $\mathfrak{L}(G)$ — пространство Дугунджи и, следовательно, диадично. Как показал недавно Ю. В. Цыбенко, при $\omega(G) > \aleph_1$ пространство $\mathfrak{L}(G)$ недиадично.

Замечание 3. Следующая задача поставлена А. В. Архангельским и автором в работе [5, с. 25]: «Верно ли, что число Суслина пространства $\mathfrak{L}(G)$ счетно, если $\mathfrak{L}(G)$ — компакт? Тот же вопрос, если G — компактная группа». Для компактной группы G ответ следует из теоремы 2. Пусть группа G локально компактна либо имеет базу окрестностей единицы, состоящую из подгрупп. Предположим также, что пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно. Из характеризационных теорем работ [6, 7] следует, что если G некомпактна, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ счетно. Таким образом, получаем положительное решение задачи для соответствующих классов топологических групп.

Замечание 4. Пусть G — бесконечная локально компактная группа, $\exp_c G$ — подпространство всех непустых компактных подмножеств из G. Определим отображение $p : \exp_c G_c \to \mathfrak{L}(G)$, сопоставляя каждому компакту K подгруппу $\langle K \rangle$, топологически порожденную K. Ясно, что $c(\exp_c G) = c(\exp G) = c(G)$ и $\overline{p(\exp_c G)} = \mathfrak{L}(G)$. Поэтому, если отображение p непрерывно, то $c(\mathfrak{L}(G)) = c(G)$. Можно показать, что p непрерывно тогда и только тогда, когда группа G нульмерна и любая некомпактная топологически компактно порожденная подгруппа из G открыта. В частности, если группа G нульмерна и индуктивно компактна, то отображение p непрерывно. Это дает более простое доказательство теоремы 2, но при дополнительном предположении о нульмерности G.

1. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М. : Наука, 1974.— 424 с.
2. *Протасов И. В.* Локальные теоремы для топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— **43**, № 6.— С. 1430—1440.
3. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований.— М. : Наука, 1980.— 440 с.
4. *Щепин Е. В.* О $\varkappa$-метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— **43**, № 2.— С. 442—478.
5. *Нерешенные* задачи топологической алгебры.— Кишинев: Штиинца, 1985.— 38 с.
6. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 378—385.
7. *Протасов И. В.* 0-мерные группы с компактным пространством подгрупп // Мат. заметки.— 1985.— **37**, № 4.— С. 483—490.

Киев. ун-т

Получено 05.05.86