УДК 517.983

Ю. М. Арлинский

К теории операторных средних

Установлены новые свойства операторных связей и средних. В частности, получены представления произвольной связи через вогнутую представляющую функцию, оценка нормы связи в идеале Неймана — Шаттена, соотношение между операторными средними и свертками на операторные области.

Установлені нові властивості операторних зв'язків і середніх. Зокрема, одержані зображення довільного зв'язку через угнуту зображувальну функцію, оцінка норми зв'язку в ідеалі Неймана — Шаттена, співвідношення між операторними середніми та згортками на операторні області.

1. Изучение операторных связей и средних начато в работе [1], в которой определяется операция параллельного сложения двух неотрицательных матриц, мотивированная теорией электрических цепей.

В последующих работах [2—4] эта операция распространена на ограниченные неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Гармоническое среднее таких операторов — удвоенная их параллельная сумма [5].

Геометрическое среднее двух операторов впервые определено в [6], а в [5, 7] даны другие его определения. Аксиоматический подход к теории связей и средних предложили Ф. Кубо и Т. Андо в [8]. Ниже приводятся основные понятия этой теории.

Пусть H — гильбертово пространство, $\mathcal{L}(H)$ — алгебра ограниченных операторов в H, $\mathcal{L}_+(H)$ — конус неотрицательных ограниченных самосопряженных операторов.

Бинарная операция σ на $\mathcal{L}_+(H)$ называется связью, если выполняются следующие условия:

I. $A \leqslant C,\ B \leqslant D \Rightarrow \sigma(A, B) \leqslant \sigma(C, D)$;

II. $C\sigma(A, B)C \leqslant \sigma(CAC, CBC)\ \ \forall A,\ B,\ C \in \mathcal{L}_+(H)$;

III. $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Rightarrow \sigma(A_n, B_n) \downarrow \sigma(A, B)$.

Непосредственным следствием II является равенство

II′. $C\sigma(A, B)C = \sigma(CAB, CBC)\ \ \forall A,\ B \in \mathcal{L}_+(H)$ и обратимого $C \in \mathcal{L}_+(H)$.

Из I и II следует также перестановочность $\sigma(A, B)$ со всяким оператором, перестановочным одновременно с A и B.

Связь m называется средним, если $m(I, I) = I$, где I — тождественный оператор в H.

Среднее называется симметричным, если $m(A, B) = m(B, A)\ \forall A$, $B \in \mathcal{L}_+(H)$.

Следующие бинарные операции представляют примеры связей и средних:

1. Арифметическое среднее $a(A, B) = (A + B)/2$;

2. Параллельная сумма. Обозначение $A : B$. По определению [1] $\forall x \in H$

$$((A : B)x,\ x) = \inf\{(Ay,\ y) + (Bz,\ z),\ x = y + z\}.$$

Эквивалентное определение [4]

$$A : B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A(A + B + \varepsilon I)^{-1}B.$$

Для обратимых A и B $A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

Гармоническое среднее $h(A, B) = 2(A : B)$;

3. Геометрическое среднее g. Для обратимых A, B по определению [5]

$$g(A, B) = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2},$$

для произвольных A, B [6]

$$g(A, B) = \max\{X \in \mathcal{L}_+(H) : |(X\varphi, \psi)| \leqslant \| A^{1/2}\varphi \| \| B^{1/2}\psi \|, \forall \varphi, \psi \in H\}.$$

Следующее определение геометрического среднего является непосредственным обобщением этого понятия для чисел. Используют итерационную процедуру [7]: пусть $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_n = a(A_{n-1}, B_{n-1})$, $B_n = h(A_{n-1}, B_{n-1})$, $n \geqslant 1$. Тогда $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ соответственно не возрастает, не убывает и имеет общий предел $g(A, B)$. Для перестановочных A и B $g(A, B) = (AB)^{1/2}$. Справедливы неравенства $h(A, B) \leqslant g(A, B) \leqslant a(A, B)$ $\forall A, B \in \mathcal{L}_+(H)$ [5];

4. Арифметико-геометрическое или гауссово среднее ag [7]. Пусть $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_n = a(A_{n-1}, B_{n-1})$, $B_n = g(A_{n-1}, B_{n-1})$, $n \geqslant 1$. Тогда $ag(A, B) = \lim A_n = \lim B_n$.

Очевидно, выполнение неравенств $g(A, B) \leqslant ag(A, B) \leqslant (a(A, B))$. Отметим, что $ag(0, A) = 0$ $\forall A \in \mathcal{L}_+(H)$.

Пусть σ — связь и $f_\sigma(x) = \sigma(I, xI)$, где x — неотрицательное число. В [8] доказано, что $f_\sigma(x)$ — скалярная операторно-монотонная [9] непрерывная функция на $[0, \infty)$, причем отображение $\sigma \to f_\sigma$ является взаимно однозначным, сохраняющим порядок отображением множества всех связей на класс непрерывных операторно-монотонных функций, и для обратимого $A \in \mathcal{L}_+(H)$

$$\sigma(A, B) = A^{1/2} f_\sigma(A^{-1/2}BA^{-1/2}) A^{1/2}$$

в смысле функционального исчисления.

Если m — среднее, то $f_m(x) = 1$, а для симметричного среднего $f_m(x) = x f_m(1/x)$ $\forall x > 0$.

В [10] для произвольного среднего m определена другая представляющая функция $F_m(y) = m(yI, (1-y)I)$, $y \in [0, 1]$, причем $F_m(y)$ является операторно-вогнутой [9] и отображение $m \to F_m$ является сохраняющим порядок изоморфизмом всех симметричных средних и класса всех непрерывных операторно-вогнутых функций на $[0, 1]$ с условием $F_m(1/2) = 1/2$. Очевидно, $F_m(y) = y f_m((1-y)/y)$, $y \neq 0$.

Заметим, что поскольку любая связь σ обладает свойством [8]

IV. $\sigma(A, B) + \sigma(C, D) \leqslant \sigma(A + C, B + D)$ $\forall A, B, C, D \in \mathcal{L}_+(H)$, то скалярная функция $F_\sigma(y) = \sigma(yI, (1-y)I)$, $y \in [0, 1]$, также является операторно-вогнутой и для произвольного неотрицательного сжатия M : $\sigma(M, I - M) = F_\sigma(M)$ в смысле функционального исчисления. Вследствие IV для симметричного среднего m справедливо неравенство $F_m(y) \leqslant 1/2$ $\forall y \in [0, 1]$.

В настоящей статье устанавливаются новые свойства связей и средних. В частности, получено представление произвольной связи через вогнутую представляющую функцию F_σ, сводящее вычисление связи к вычислению ее от двух коммутирующих операторов. Исходя из этого, дано другое доказательство теоремы Т. Андо [11] о геометрическом среднем как единственной неподвижной точке отображения $\Phi(X) = (A + X) : (B + X)$, $X \in \mathcal{L}_+(H)$, и установлены оценки нормы связи в идеалах Неймана—Шаттена (такого рода оценка известна лишь для гармонического среднего [12]). Доказываются также новые соотношения между средними и свертками на операторную область [3, 13—17].

2. Если L — линейный оператор, то символами $\mathcal{R}(L)$ и $\operatorname{Ker} L$ будем обозначать его область значений и ядро.

Пусть A, $B \in \mathcal{L}_+(H)$. Легко видеть, что в подпространстве $H_0 = \overline{\mathcal{R}(A + B)}$ существует такое неотрицательное сжатие M, что выполняются равенства

$$A = (A+B)^{1/2} M (A+B)^{1/2}, \quad B = (A+B)^{1/2} (I-M)(A+B)^{1/2}. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Для любой связи σ и любых $A, B \in \mathcal{L}_+(H)$ справедливо равенство*

$$\sigma(A, B) = (A+B)^{1/2} F_\sigma(M) (A+B)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$. Тогда $A = (A+B_\varepsilon)^{1/2} \times M_\varepsilon (A+B_\varepsilon)^{1/2}$, где M_ε — неотрицательное сжатие в H. Из (1) $M_\varepsilon = (A+B_\varepsilon)^{-1/2}(A+B)^{1/2} M (A+B_\varepsilon)^{-1/2}(A+B)^{1/2}$, $\operatorname{Ker} M_\varepsilon \supseteq H \ominus H_0$. Поскольку $s - \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (A+B_\varepsilon)^{-1/2}(A+B)^{1/2} = I \mid H_0$, то $s - \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} M_\varepsilon \mid H_0 = M$, $s - \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_\sigma(M_\varepsilon) \mid H_0 = F_\sigma(M)$, $F_\sigma(M_\varepsilon) \mid H \ominus H_0 = F_\sigma(0) I \mid H \ominus H_0$. Учитывая II′, имеем $\sigma(A, B_\varepsilon) = (A+B_\varepsilon)^{1/2} \sigma(M_\varepsilon, \mathrm{I} - M_\varepsilon)(A+B_\varepsilon)^{1/2} = (A+B_\varepsilon)^{1/2} F_\sigma(M_\varepsilon)(A+B_\varepsilon)^{1/2}$. Отсюда и из III

$$\sigma(A, B) = s - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sigma(A, B_\varepsilon) = (A+B)^{1/2} F_\sigma(M) (A+B)^{1/2}.$$

Из теоремы 1 для гармонического и геометрического средних получаем

$$h(A, B) = 2(A+B)^{1/2}(M - M^2)(A+B)^{1/2}, \qquad (2)$$

$$g(A, B) = (A+B)^{1/2}(M - M^2)^{1/2}(A+B)^{1/2}. \qquad (3)$$

Как известно [8], для произвольных $T \in \mathcal{L}(H)$, A, $B \in \mathcal{L}_+(H)$ и связи σ имеет место неравенство $T^*\sigma(A, B) T \leqslant \sigma(T^*AT, T^*BT)$. Выведем из теоремы 1 достаточное условие равенства в этом неравенстве.

Предложение 1. *Пусть $T \in \mathcal{L}(H)$, A, $B \in \mathcal{L}_+(H)$. Если выполнено условие*

$$\operatorname{Ker} T^* \cap \mathcal{R}((A+B)^{1/2}) = \{0\}, \qquad (4)$$

то для любой связи σ выполняется равенство

$$T^*\sigma(A, B) T = \sigma(T^*AT, T^*BT).$$

Доказательство. Пусть снова $H_0 = \overline{\mathcal{R}(A+B)}$. Ясно, что условие (4) эквивалентно равенству $\overline{\mathcal{R}((A+B)^{1/2}T)} = H_0$. Обозначим $A_1 = T^*AT$, $B_1 = T^*BT$. Тогда $(A_1+B_1)^{1/2} = W(A+B)^{1/2} T$, где W — изометрическое отображение H_0 на $H_1 = \overline{\mathcal{R}(A_1+B_1)}$.

Пусть $A_1 = (A_1+B_1)^{1/2}$, $M_1(A_1+B_1)^{1/2}$, где M_1 — неотрицательное сжатие в подпространстве H_1. Вследствие (1) $A_1 = T^*(A+B)^{1/2} M (A+B)^{1/2} T$. Следовательно, $M_1 = WMW^* | H_1$ и $F_\sigma(M_1) = W F_\sigma(M) W^* \mid H_1$. По теореме 1 $\sigma(A_1, B_1) = (A_1+B_1)^{1/2} F_\sigma(M_1)(A_1+B_1)^{1/2} = T^*(A+B)^{1/2} F_\sigma(M)(A+B)^{1/2} T = T^*\sigma(A, B) T$.

Пусть A, $B \in \mathcal{L}_+(H)$. Рассмотрим на $\mathcal{L}_+(H)$ отображение $\Phi(X) = (A+X) : (B+X)$. Т. Андо в [11] доказал, что единственной неподвижной точкой Φ является геометрическое среднее $g(A, B)$. Докажем этот результат на основе теоремы 1.

Предложение 2. (*Т. Андо* [11]). *Единственной неподвижной точкой отображения Φ является геометрическое среднее g.*

Доказательство. Покажем, что $\Phi(g(A, B)) = g(A, B)$. По формуле (3) $g(A, B) = (A+B)^{1/2}(M - M^2)^{1/2}(A+B)^{1/2}$, где M — такое неотрицательное сжатие в $H_0 = \overline{\mathcal{R}(A+B)}$, что выполнены (1). Тогда $A + g(A, B) = (A+B)^{1/2}(M + (M - M^2)^{1/2})(A+B)^{1/2}$, $B + g(A, B) = (A+B)^{1/2}(I - M + (M - M^2)^{1/2})(A+B)^{1/2}$. Очевидно, $\operatorname{Ker}(A+B)^{1/2} \cap \mathcal{R}(I+$

$+ 2(M - M^2)^{1/2}) = \{0\}$, где I — тождественный оператор в H_0. Тогда по предложению 1

$$\Phi(g(A, B)) = (A + B)^{1/2}((M + (M - M^2)^{1/2}) : (I - M + (M - M^2)^{1/2}))(A + B)^{1/2} = (A+B)^{1/2}(M+(M-M^2)^{1/2})(I+(M-M^2)^{1/2}-M)(I+2(M-M^2)^{1/2})^{-1}(A + B)^{1/2} = (A + B)^{1/2}(M - M^2)^{1/2}(A + B)^{1/2} = g(A, B).$$

Пусть $X \in \mathcal{L}_+(H)$ — неподвижная точка Φ. Обозначим $T = A + B + 2X$. Тогда $A = T^{1/2}N_1T^{1/2}$, $X = T^{1/2}N_2T^{1/2}$, $B = T^{1/2}(I - N_1 - 2N_2)T^{1/2}$ $B + X = T^{1/2}(I - N_1 - N_2)T^{1/2}$, где N_1, N_2 — неотрицательные сжатия в $H_T = \overline{\mathcal{R}(T)}$, I — тождественный оператор в H_T.

По теореме 1 $\Phi(X) = T^{1/2}((N_1 + N_2) : (I - N_1 - N_2))T^{1/2} = T^{1/2}(N_1 + N_2 - (N_1 + N_2)^2)T^{1/2}$.

Так как $\Phi(X) = X$, то $N_1 + N_2 - (N_1 + N_2)^2 = N_2$, и следовательно, $N_2 = N_1^{1/2} - N_1$, $X = T^{1/2}(N_1^{1/2} - N_1)T^{1/2}$.

Поскольку $\operatorname{Ker} T^{1/2} \cap \mathcal{R}((A + B)^{1/2}) = \{0\}$, то по предложению 1 $g(A, B) = T^{1/2}g(N_1, I - N_1 - 2N_2)T^{1/2}$.

Из $N_2 = N_1^{1/2} - N_1$ получаем $I - N_1 - 2N_2 = (I - N_1^{1/2})^2$, поэтому $g(A, B) = T^{1/2}N_1^{1/2}(I - N_1^{1/2})T^{1/2} = X$.

Предложение 3. *Для любой связи σ и для любых $A, B \in \mathcal{L}_+(H)$ справедливо неравенство $\forall e \in H$*

$$(\sigma(A. B)e, e) \leqslant \sigma((Ae, e), (Be, e)). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть M неотрицательное сжатие и $M = \int_0^1 y dE_y$ спектральное разложение M. Поскольку функция $F_\sigma(y) = \sigma(y, 1 - y)$ является вогнутой, то для $e \in H$, $\|e\| = 1$, имеем $(F_\sigma(M)e, e) = \int_0^1 F_\sigma(y)d(E_ye, e) \leqslant F_\sigma\left(\int_0^1 yd(E_y, e, e)\right) = F_\sigma((Me, e)) = \sigma((Me, e), ((I - M)e, e))$.

Отсюда и из II' следует справедливость для $\forall e$ неравенства $F_\sigma((Me, e)) \leqslant \sigma((Me, e), ((I - M)e, e))$. Применяя теорему 1, с учетом (1) получаем (5).

Из (5), в частности, получаем

$$\|\sigma(A, B)\| \leqslant \sigma(\|A\|, \|B\|) \quad \forall A, B \in \mathcal{L}_+(H).$$

Более того, справедливо предложение 4.

Предложение 4. *Пусть гильбертово пространство H сепарабельно, S_p — операторный идеал Неймана—Шаттена, $p \geqslant 1$, $A, B \in S_p \cap \mathcal{L}_+(H)$, σ — связь. Тогда $\sigma(A, B) \in S_p$ и*

$$\|\sigma(A, B)\|_p \leqslant \sigma(\|A\|_p, \|B\|_p).$$

Доказательство. Поскольку $(A + B)^{1/2} \in S_{2p}$, то из теоремы 1 следует, что $\sigma(A, B) \in S_p$.

Далее предположим, что $A, B \in S_1$ и пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H. Тогда в силу IV для любого n имеем

$$\sum_{k=1}^n \sigma((Ae_k e_k), (Be_k, e_k)) \leqslant \sigma\left(\sum_{k=1}^n (Ae_k, e_k), \sum_{k=1}^n (Be_k, e_k)\right).$$

Отсюда и из (5) получаем

$$\sum_{k=1}^n (\sigma(A, B)e_k, e_k) \leqslant \sigma\left(\sum_{k=1}^n (Ae_k, e_k), \sum_{k=1}^n (Be_k, e_k)\right).$$

Учитывая монотонность связи, получаем

$$\operatorname{tr}\sigma(A, B)\leqslant\sigma(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B). \tag{6}$$

Пусть $C\in S_p\cap\mathscr{L}_+(H)$, $p>1$. Тогда, как известно,

$$\|C\|_p=\sup\{\operatorname{tr}(G^{1/2}CG^{1/2}),\ G\in S_q\cap\mathscr{L}_+(H),\ \|G\|_q\leqslant 1,\ 1/q+1/p=1\}.$$

Из I, II и (6) теперь получим для A, $B\in S_p\cap\mathscr{L}_+(H)$, $p>1$,

$$\|\sigma(A, B)\|_p=\sup\{\operatorname{tr}(G^{1/2}\sigma(A, B)G^{1/2}),\ G\in S_q\cap\mathscr{L}_+(H),\ \|G\|_q\leqslant 1\}\leqslant$$
$$\leqslant\sup\{\sigma(\operatorname{tr}(G^{1/2}AG^{1/2},\ \operatorname{tr}(G^{1/2}BG^{1/2})),\ G\in S_q\cap\mathscr{L}_+(H),\ \|G\|_q\leqslant 1\}\leqslant$$
$$\leqslant\sigma(\|A\|_p, \|B\|_p).$$

Отметим, что в [12] получено неравенство $\|A:B\|_p\leqslant\|A\|_p:\|B\|_p$.

Из (2) и (3) нетрудно видеть, что каждое из равенств $h(A, B)=a(A, B)$ и $g(A, B)=a(A, B)$ имеет место тогда и только тогда, когда $A=B$. Найдем критерий равенства $g(A, B)=h(A, B)$. Если равенство верно, то из (2) и (3) получаем $2(M-M^2)=(M-M^2)^{1/2}$. Это означает, что $H_0=H_{01}\oplus H_{02}\oplus H_{03}$, $M\mid H_{01}=1/2\ \ I\mid H_{01}$, $M\mid H_{02}=0$, $M\mid H_{03}=I\mid H_{03}$, $H_0=\overline{\mathcal{R}(A+B)}$.

Пусть Q_k — ортопроектор на H_{0k}, $k=1, 2, 3$, $C=A+B$, тогда

$$A=C^{1/2}(1/2Q_1+Q_3)C^{1/2},\quad B=C^{1/2}(1/2Q_1+Q_2)C^{1/2}. \tag{7}$$

Верно и обратное: если $C\in\mathscr{L}_+(H)$ и Q_k, $k=1, 2, 3$, — взаимно ортогональные ортопроекторы в $\overline{\mathcal{R}(C)}$ такие, что $Q_1+Q_2+Q_3=I\mid\overline{\mathcal{R}(C)}$, то для операторов A и B, задаваемых равенствами (7), по теореме 1 имеем $g(A, B)=h(A, B)=1/2C^{1/2}Q_1C^{1/2}$. Если среднее m таково, что $h\leqslant m\leqslant g$, то из равенства $g(A, B)=h(A, B)$ для некоторых A, $B\in\mathscr{L}_+(H)$ очевидно равенство $m(A, B)=h(A, B)$. Однако верна также следующая теорема.

Теорема 2. *Если для некоторых A, $B\in\mathscr{L}_+(H)$ выполняется равенство $g(A, B)=h(A, B)$, то для любого симметричного среднего m с условием $m(0, I)=0$ также верно $m(A, B)=h(A, B)$.*

Доказательство. Так как $g(A, B)=h(A, B)$, то имеют место равенства (7). По теореме 1 и предложению 1 для любого симметричного среднего m имеем $m(A, B)=C^{1/2}F_m(1/2Q_1+Q_3)C^{1/2}=C^{1/2}(1/2Q_1+F_m(0)Q_2+F_m(1)Q_3)C^{1/2}$. Если $m(0, I)=0$, то $F_m(0)=F_m(1)=0$, поэтому $m(A, B)=h(A, B)$.

Отметим, что утверждение теоремы верно для арифметико-геометрического среднего ag, так как $ag(0, I)=0$.

3. Пусть $\mathfrak{N}$ — подпространство в H, $A\in\mathscr{L}_+(H)$, $A_{\mathfrak{N}}=\max\{0\leqslant X\leqslant A,\ \mathcal{R}(X)=\mathfrak{N}\}$. Оператор $A_{\mathfrak{N}}$ определен М. Г. Крейном в [13] и играет важную роль в теории самосопряженных сжимающих расширений эрмитова сжатия.

Свойства $A_{\mathfrak{N}}$ исследованы в [3, 13, 14] (в [3] оператор $A_{\mathfrak{N}}$ назван укороченным), в [15] дано аксиоматическое описание преобразования $A\to A_{\mathfrak{N}}$.

В [13] установлено равенство

$$A_{\mathfrak{N}}=A^{1/2}QA^{1/2}, \tag{8}$$

где Q — ортопроектор на пространство $\mathfrak{W}=(A^{1/2})^{-1}\{\mathfrak{N}\}$.

В [16] Т. Андо распространил операцию $\mathfrak{N}\to A_{\mathfrak{N}}$ на незамкнутые линеалы $\mathfrak{N}$, являющиеся областями значений линейных операторов (операторные области).

По определению [16] (см. также [17])

$$A_{\mathfrak{N}}=\max\{0\leqslant X\leqslant A,\ \overline{(X^{1/2})^{-1}\{\mathfrak{N}\}}=H\}.$$

В [17] оператор $A_{\mathfrak{N}}$ назван сверткой на операторную область и установлено равенство (8), где в этот раз Q-ортопроектор на $\overline{(A^{1/2})^{-1}\{\mathfrak{N}\}}$.

В [2] для $\forall A,\ B \in \mathcal{L}_+(H)$ доказано, что линеал $\Omega = \mathcal{R}(A^{1/2}) \cap \cap\ \mathcal{R}(B^{1/2})$ является операторной областью и $\Omega = \mathcal{R}(h^{1/2}(A, B))$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $A,\ B \in \mathcal{L}_+(H)$. Тогда для любого симметричного среднего m с условием $m(0, I) = 0$ справедливо равенство $m(A, B) = m(A_\Omega, B_\Omega)$.*

Доказательство. Из (1) следует существование изометрических отображений Z и W соответственно $\overline{\mathcal{R}(A)}$ на $\overline{\mathcal{R}(M)}$ и $\overline{\mathcal{R}(B)}$ на $\overline{\mathcal{R}(I-M)}$ таких, что выполнены равенства

$$ZA^{1/2} = M^{1/2}(A+B)^{1/2}, \quad WB^{1/2} = (I-M)^{1/2}(A+B)^{1/2}. \tag{9}$$

Пусть Q_0 — ортопроектор на $\overline{\mathcal{R}(M-M^2)}$ в $H_0 = \overline{\mathcal{R}(A+B)}$ и

$$S = Z^* Q_0 W. \tag{10}$$

Тогда S — частичная изометрия из $\overline{\mathcal{R}(B)}$ в $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Покажем, что $\mathcal{R}(S) = \overline{(A^{1/2})^{-1}\{\Omega\}} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$. Из (2) имеем $h^{1/2}(A, B) = \sqrt{2}U(M-M^2)^{1/2}(A + B)^{1/2}$, где U — изометрическое отображение $\overline{\mathcal{R}(M-M^2)}$ на $\bar{\Omega}$. Отсюда и из (9) имеем $h^{1/2}(A, B) = \sqrt{2}U(I-M)^{1/2}ZA^{1/2} = \sqrt{2}A^{1/2}Z^*Q_0(I - M)^{1/2}U^*$. Следовательно, $(A^{1/2})^{-1}\{\Omega\} \cap \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(Z^*Q_0(I-M)^{1/2})$, поэтому $\overline{(A^{1/2})^{-1}\{\Omega\}} \cap \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(Z^*Q_0) = \mathcal{R}(S)$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{R}(S^*) = \overline{(B^{1/2})^{-1}\{\Omega\}} \cap \overline{\mathcal{R}(B)}$. Поскольку $A_\Omega = A^{1/2}Q_S A^{1/2}$, $B_\Omega = B^{1/2}Q_{S^*}B^{1/2}$, где Q_S и Q_{S^*} — ортопроекторы на $\mathcal{R}(S)$ и $\mathcal{R}(S^*)$ соответственно, то из (9) и (10)

$$A_\Omega = A^{1/2}SS^*A^{1/2} = A^{1/2}Z^*Q_0ZA^{1/2} = (A+B)^{1/2}MQ_0(A+B)^{1/2},$$

$$B_\Omega = B^{1/2}S^*SB^{1/2} = B^{1/2}W^*Q_0WB^{1/2} = (A+B)^{1/2}(I-M)Q_0(A+B)^{1/2}.$$

Согласно [18] условие $m(0, I) = 0$ влечет $\overline{\mathcal{R}(m(M, I-M))} \subseteq \overline{\mathcal{R}(M)} \cap \cap\ \overline{\mathcal{R}(I-M)} = \mathcal{R}(Q_0)$, поэтому, применяя теорему 1 и предложение 1, получаем

$$m(A_\Omega, B_\Omega) = (A+B)^{1/2}m(MQ_0, (I-M)Q_0)(A+B)^{1/2} =$$

$$= (A+B)^{1/2}m(M, (I-M))(A+B)^{1/2} = m(A, B).$$

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{N}$ — пространство в H, тогда для любого симметричного среднего m с условием $m(0, I) = 0$ для любых $A,\ B \in \mathcal{L}_+(H)$ справедливы равенства*

$$m(A_{\mathfrak{N}}, B) = m(A, B_{\mathfrak{N}}) = m(A_{\mathfrak{N}}, B_{\mathfrak{N}}).$$

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{K} = \mathcal{R}(A_{\mathfrak{N}}^{1/2}) \cap \mathcal{R}(B^{1/2})$, $\Omega = \mathcal{R}(A^{1/2}) \cap \mathcal{R}(B^{1/2})$. Так как $\mathcal{R}(A_{\mathfrak{N}}^{1/2}) = \mathfrak{N} \cap \mathcal{R}(A^{1/2})$ [13], то $\mathfrak{K} = \Omega \cap \cap\ \mathfrak{N}$. По теореме 3 $m(A_{\mathfrak{N}}, B) = m((A_{\mathfrak{N}})_{\mathfrak{K}}, B_{\mathfrak{K}}) \leqslant m(A_{\mathfrak{N}}, B_{\mathfrak{N}})$. С другой стороны $m(A_{\mathfrak{N}}, B_{\mathfrak{N}}) \leqslant m(A_{\mathfrak{N}}, B)$. Поэтому $m(A_{\mathfrak{N}}, B_{\mathfrak{N}}) = m(A_{\mathfrak{N}}, B)$. Аналогично, $m(A_{\mathfrak{N}}, B_{\mathfrak{N}}) = m(A, B_{\mathfrak{N}})$.

В [3] оператор $A_{\mathfrak{N}}$ для подпространства $\mathfrak{N}$ охарактеризован с помощью среднего гармонического (параллельной суммы) $A_{\mathfrak{N}} = \lim\limits_{t\to+\infty}(A : tP_{\mathfrak{N}})$, где $P_{\mathfrak{N}}$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}$. Дадим характеризацию $A_{\mathfrak{N}}$ с помощью геометрического среднего.

П р е д л о ж е н и е 6. Пусть $P_{\mathfrak{N}}$ — ортопроектор в H на подпространство $\mathfrak{N}$, тогда для любого $A \in \mathcal{L}_+(H)$ справедливо равенство $A_{\mathfrak{N}} = g^2(A, P_{\mathfrak{N}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 5 $g(A, P_{\mathfrak{N}}) = g(A_{\mathfrak{N}}, P_{\mathfrak{N}})$. Так как $A_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{N}} A_{\mathfrak{N}} = A_{\mathfrak{N}}$, то отсюда $g(A_{\mathfrak{N}}, P_{\mathfrak{N}}) = A_{\mathfrak{N}}^{1/2}$.

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ — два подпространства в H, $A \in \mathcal{L}_+(H)$. Тогда для любого симметричного среднего m с условием $m(0, I) = 0$ справедливо равенство $m(A_{\mathfrak{N}_1}, A_{\mathfrak{N}_2}) = A_{\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A_{\mathfrak{N}_k} = A^{1/2} Q_k A^{1/2}$, где Q_k — ортопроектор на $\mathfrak{W}_k = \overline{(A^{1/2})^{-1}\{\mathfrak{N}_k\}} \cap \mathcal{R}(A)$, $k = 1, 2$. Поскольку $\mathcal{R}((Q_1 + Q_2)^{1/2}) = \mathcal{R}(Q_1) + \mathcal{R}(Q_2)$ [2], то $\operatorname{Ker} A^{1/2} \cap \mathcal{R}((Q_1 + Q_2)^{1/2}) = \{0\}$, поэтому по предложению 1 $m(A_{\mathfrak{N}_1}, A_{\mathfrak{N}_2}) = A^{1/2} m(Q_1, Q_2) A^{1/2}$. Как показано в [18], условие $m(0, I) = 0$ равносильно равенству $m(P, Q) = P \wedge Q$ для любых ортопроекторов P и Q, где $P \wedge Q$ — ортопроектор на $\mathcal{R}(P) \cap \cap \mathcal{R}(Q)$. Следовательно,

$$m(A_{\mathfrak{N}_1}, A_{\mathfrak{N}_2}) = A^{1/2}(Q_1 \wedge Q_2) A^{1/2} = A_{\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2}.$$

В заключение приведем одно выражение для геометрического среднего, использующее свертку.

П р е д л о ж е н и е 8. *Пусть A, $B \in \mathcal{L}_+(H)$, $\Omega = \mathcal{R}(A^{1/2}) \cap \mathcal{R}(B^{1/2})$. Тогда $g(A, B) = A_\Omega^{1/2} U B_\Omega^{1/2}$, где U — унитарный оператор в $\overline{\Omega}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (3) с использованием (9) имеем

$$g(A, B) = A^{1/2} S B^{1/2}, \tag{11}$$

где S — частичная изометрия, определенная равенством (10).

При доказательстве теоремы 3 получены соотношения $A_\Omega = A^{1/2} Q_s A^{1/2}$, $B_\Omega = B^{1/2} Q_{S^*} B^{1/2}$, где Q_S и Q_{S^*} — ортопроекторы на $\mathcal{R}(S)$ и $\mathcal{R}(S^*)$. Отсюда имеем $A_\Omega^{1/2} = X Q_s A^{1/2}$, $B_\Omega^{1/2} = Y Q_{S^*} B^{1/2}$, где X и Y — изометрические отображения соответственно $\overline{\mathcal{R}(S)}$ на $\overline{\mathcal{R}(A_\Omega^{1/2})}$, $\overline{\mathcal{R}(S^*)}$ на $\overline{\mathcal{R}(B_\Omega^{1/2})}$. Нетрудно видеть, что $\Omega = (A + B)^{1/2} \mathcal{R}((M - M^2)^{1/2})$ и $\overline{\mathcal{R}(A_\Omega^{1/2})} = \overline{\mathcal{R}(B_\Omega^{1/2})} = \overline{\Omega}$. Из (11) $g(A, B) = A^{1/2} S B^{1/2} = A_\Omega^{1/2} X S Y^* B_\Omega^{1/2}$.

Так как S — частичная изометрия, то из определения X и Y получаем, что $V = XSY^*$ — унитарный оператор в $\overline{\Omega}$.

1. *Anderson W. N., Duffin B. J.* Series and parallel additions ofmatrices // J. Math. Anal. Appl.— 1969.— **26**.— P. 576—594.
2. *Filmore P. A., Williams J. P.* On operator ranges // Adv. Math.— 1971.— **7**, N 3.— P. 254—281.
3. *Anderson W. N., Trapp G. E.* Shorted operators // SIAM J. Appl. Math.— 1975.— **28**, N 1.— P. 60—71.
4. *Пекарев Э. Л., Шмульян Ю. Л.* Параллельное сложение и параллельное вычитание операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1976.— **40**, № 2.— С. 366—387.
5. *Ando T.* Topics on operator inequalities // Ryukyu Univ. Lect. Note Ser.— 1978.— N 1.— P. 44—70.
6. *Pusz W., Woronowicz S. L.* Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map // Rept. Math. Phys.— 1975.— **8**, N 2.— P. 159—170.
7. *Anderson W. N., Morley T. D., Trapp G. E.* Characterization of parallel subtraction // Proc. Nat. Acad. Sci USA.— 1979.— **76**.— P. 3599—3601.
8. *Kubo F., Ando T.* Means of positive linear operators // Math. Ann.— 1980.— **246**, N 3.— P. 205—224.
9. *Bendat J., Sherman S.* Monotone and convex operator functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1955.— **79**, N 1.— P. 58—71.
10. *Fujii J. I.* Operator-concave functions and means of positive linear functionals // Math. Jap.— 1980.— **25**, N 4.— P 453—461.
11. *Ando T.* Fixed points of certain maps on positive semidefinite operators // Functional analysis and approximation : Proc. Conf. (Oberwolfach, 9—16 aug., 1980).— Basel, 1981.— P. 29—38.

12. *Morley T. D.* Parallel summation, Maxwell's principle and the infimum of projections // J. Math. Anal. Appl.— 1979.— **70**, N 1.— P. 33—41.
13. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб.— 1947.— **20**, № 3.— С. 431—490.
14. *Шмульян Ю. Л.* Операторный интеграл Хеллингера // Мат. сб.— 1959.— **49**, № 4.— С. 381—430.
15. *Nishio K., Ando T.* Characterization of operations derived from network connections // J. Math. Anal. Appl.— 1976.— **53**.— P. 539—549.
16. *Ando T.* Lebesgue type decomposition of positive operators // Acta Sci. Math. Szeged.— 1976.— **38**.— P. 253—260.
17. *Пекарев Э. Л.* О свертке на операторную область // Функцион. анализ.— 1978.— **12**, № 3.— С. 84—85.
18. *Fujii J. I.* Initial conditions on operator-monotone functions // Math. Jap.— 1979.— **24**, N 4.— P. 459—462.

Ворошиловгр. машиностроит. ин-т

Получено 26.05.89