УДК 517.5

В. Т. Гаврилюк

Асимптотические оценки приближения непрерывных периодических функций суммами Фурье

Для уклонений непрерывных периодических функций от их сумм Фурье установлены асимптотические оценки, которые выражаются через значение модуля непрерывности r-го порядка ($r \geqslant 2$) в точке $t = \pi/n$ функции $f \in C_{2\pi}$ или (ψ, β)-производной функции $f \in C^{\psi}_{\beta}C$.

Для відхилень неперервних періодичних функцій від їх сум Фур'є встановлені асимптотичні оцінки, які виражаються через значення модуля неперервності r-го порядку ($r \geqslant 2$) в точці $t = \pi/n$ у випадку $f \in C_{2\pi}$ або (ψ, β)-похідної у випадку $f \in C^{\psi}_{\beta}C$.

Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \max|f(x)|$, а через $\omega_r(f, t)$ — модуль непрерывности r-го порядка функции $f \in C_{2\pi}$; $\omega_r(f, t) = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \|\Delta_h^r f(x)\| = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \left\| \sum\limits_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x + ih) \right\|$. Пусть

$$S[f] = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f \in C_{2\pi}$ и $S_{n-1}(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k(f, x)$ — частичная сумма порядка $n - 1$. Через $\mathfrak{W}$ будем обозначать множество непрерывных выпуклых вниз функций $\psi(x)$, $x \geqslant 1$, $\psi(x) \to 0$, $x \to \infty$.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)) \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $C_{2\pi}$, то, следуя А. И. Степанцу [1, 2], эту функцию будем называть (ψ, β)-производной функции $f(x)$ и обозначать $f^{\psi}_{\beta}(x)$. Множество функций $f \in C_{2\pi}$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $C^{\psi}_{\beta}C$.

В работе [3] с помощью функции $\mu(x) = x/(\eta(x) - x)$, где $\eta(x) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(x)\right]$ ($\psi^{-1}(\cdot)$ — обратная функция к функции $\psi(\cdot)$), из множества $\mathfrak{W}$ выделены следующие классы функций: $\psi \in \mathfrak{W}_0$, если $0 < \mu(x) \leqslant K_1$; $\psi \in \mathfrak{W}_c$, если $K_2 \leqslant \mu(x) \leqslant K_3$, K_1, K_2, $K_3 = \mathrm{const}$; $\psi \in \mathfrak{W}_\infty$, если $\mu(x)$ монотонно возрастает и не ограничена сверху. Очевидно, $\mathfrak{W}_c \subset \mathfrak{W}_0$. В дальнейшем через K_i будем обозначать различные константы.

Через H_ω^r будем обозначать множество функций $f \in C_{2\pi}$, для которых выполняется условие $\omega_r(f, t) \leqslant \omega_r(t)$, где $\omega_r(t)$ — непрерывная функция типа модуля непрерывности r-го порядка. Функция $\omega_r(t)$ непрерывна, монотонно возрастающая, $\omega_r(0) = 0$ и $\omega_r(nt) \leqslant n^r \omega_r(t)$ [4, с. 161—167; 5].

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$, для которой $\omega_r(f, \pi/n) > 0$, $r \geqslant 2$, справедлива оценка*

$$\| f - S_{n-1}(f) \| < A_r(\pi/n)\, \omega_r(f, \pi/n), \tag{3}$$

$$A_r(\pi/n) = \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ \omega_r(f, \pi/n) > 0}} \| f - S_{n-1}(f) \| / \omega_r(f, \pi/n) = \pi^{-2} 2^{-r+2} \ln n + O(1), \tag{4}$$

где $O(1)$ обозначает равномерно ограниченную величину.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in C_\beta^\psi C$, $\psi \in \mathfrak{W}_c \cup \mathfrak{W}_\infty$, такой, что $\omega_r(f_\beta^\psi, \pi/n) > 0$, справедлива оценка*

$$\| f - S_{n-1}(f) \| < A_r^\psi\left(\frac{\pi}{n}\right) \omega_r\left(f_\beta^\psi, \frac{\pi}{n}\right), \tag{5}$$

$$A_r^\psi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sup_{\substack{f \in C_\beta^\psi C \\ \omega\left(f_\beta^\psi, \frac{\pi}{n}\right) > 0}} \| f - S_{n-1}(f) \| / \omega_r\left(f_\beta^\psi, \frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-r+2} \pi^{-2} \psi(n) (\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)), \tag{6}$$

$$\ln^+ t = \max(\ln t, 0).$$

Теорема 2′. *Для любой функции $f \in C_0^\psi C$, $\psi \in \mathfrak{W}_0$, такой,* что $\omega_r\left(f_0^\psi, \dfrac{\pi}{n}\right) > 0$, *справедлива оценка*

$$\| f - S_{n-1}(f) \| < 2^{-r+2} \pi^{-2} \psi(n) (\ln n + O(1))\, \omega_r\left(f_0^\psi, \frac{\pi}{n}\right). \tag{7}$$

При доказательстве сформулированных утверждений использована следующая лемма.

Лемма. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$, для которой $\omega_r(f, \pi/n) > 0$, справедлива оценка*

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \right| < K_r\left(\frac{\pi}{n}\right) \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \tag{8}$$

$$K_r\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right) > 0}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \right| / \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right) = 2^{-r+2} \pi^{-1},$$

$$n = 1, 2, \ldots, r \geqslant 2. \tag{9}$$

Доказательство. Для доказательства (8) достаточно установить справедливость (9). При этом можно рассматривать только такие четные функции $f \in C_{2\pi}$, для которых выполняется соотношение $\omega_r(f, \pi/n) = 1$. Множество таких функций обозначим через $H_\omega^r(\pi/n)$.

А. В. Ефимов [5] (лемма 1) доказал, что $\forall f \in C_{2\pi}$ можно построить $2\pi/n$-периодическую функцию $\varphi_f \in C_{2\pi}$, которая имеет следующие свойства:

$\varphi_f(x)$ симметрична относительно прямых $x = k\pi/n$ и точек $((2k+1)\pi/2, 0)$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, $\omega_r(\varphi_f, t) \leqslant \omega_r(f, t)$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt = \int\limits_0^{2\pi} \varphi_f(t) \cos ntdt$.

При $f \in H_\omega^r(\pi/n)$ $\omega_r(\varphi_f, \pi/n) \leqslant 1$. Множество функций $\varphi(x)$, обладающих такими свойствами, обозначим через $H_\omega^r(\varphi, \pi/n)$. Из того, что каждой функции $f \in H_\omega^r(\pi/n)$ соответствует функция $\varphi_f \in H_\omega^r(\varphi, \pi/n)$, следует справедливость неравенства

$$\sup_{f \in H_\omega^r\left(\frac{\pi}{n}\right)} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt \right| \leqslant \sup_{\varphi \in H_\omega^r\left(\varphi, \frac{\pi}{n}\right)} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t) \cos ntdt \right|. \tag{10}$$

Далее покажем, что при выполнении условия $\omega_r(\varphi, \pi/n) \leqslant 1$

$$\max_x |\varphi(x)| \leqslant 2^{-r}. \tag{11}$$

Действительно, из свойств симметричности функции $\varphi(x)$ относительно прямых $x = k\pi/n$ и точек $((2k+1)\pi/2, 0)$ следует

$$\varphi(x + k\pi/n) = (-1)^k \varphi(x). \tag{12}$$

Пусть $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi/2n} |\varphi(x)| = |\varphi(x_0)| = \eta$. Тогда $\max\limits_x |\varphi(x)| = \eta = |\varphi(x_0 + k\pi/n)|$. Следовательно, имеем

$$\left| \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \varphi\left(x_0 + \frac{i\pi}{n}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant h \leqslant \pi/n} \left\| \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \varphi(x + ih) \right\| = \omega_r\left(\varphi, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant 1.$$

Учитывая (12), получаем

$$\left| \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \varphi\left(x_0 + \frac{i\pi}{n}\right) \right| = \left| \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} (-1)^i \varphi(x_0) \right| = 2^r |\varphi(x_0)| \leqslant 1.$$

Отсюда следует справедливость (11).

Из свойств симметричности функции $\varphi(x)$ с учетом (11) и (12) имеем

$$\omega_1(\varphi, \pi/n) \leqslant 2^{-r+1}. \tag{13}$$

Обозначим через $H_\omega^1(\pi/n, r)$ множество функций $f \in C_{2\pi}$, модуль непрерывности которых удовлетворяет условию (13). Тогда, очевидно, $H_\omega^r(\varphi, \pi/n) \subset H_\omega^1(\pi/n, r)$.

Следовательно, учитывая (10), получаем

$$\sup_{f \in H_\omega^r(\pi/n)} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt \right| \leqslant \sup_{f \in H_\omega^1(\pi/n, r)} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt \right|. \tag{14}$$

Из результатов работ [6 — 8] следует, что $\forall f \in H_\omega^1(\pi/n, r)$

$$\frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt \right| < 2^{-r+2} \pi^{-1}.$$

Таким образом, учитывая (10) — (14), отсюда получаем

$$K_r \leqslant 2^{-r+2} \pi^{-1}. \tag{15}$$

Пусть теперь при произвольно малом $\varepsilon > 0$ $f_{n,\varepsilon}(t)$ — непрерывная четная $2\pi/n$-периодическая функция, которая на $[0, \pi/n]$ определена следующим образом:

$$f_{n,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 2^{-r}, & t \in [0, \pi/(2n) - \varepsilon/(4n)], \\ -2^{-r}, & t \in [\pi/(2n) + \varepsilon/(4n), \pi/n], \\ \text{линейна при } t \in [\pi/(2n) - \varepsilon/(4n),\ \pi/(2n) + \varepsilon/(4n)], \\ f_{n,\varepsilon}(t + 2\pi/n) = f_{n,\varepsilon}(t), \quad f_{n,\varepsilon}(t) = f_{n,\varepsilon}(-t). \end{cases}$$

Очевидно, $\omega_r(f_{n,\varepsilon}, \pi/n) = 1$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_{n,\varepsilon}(t)\cos ntdt > 2^{-r+2}\pi^{-1} - \varepsilon. \tag{15'}$$

Из соотношений (15) и (15′) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует справедливость (9). Лемма доказана.

Замечание 1. В случае $r = 1$ [6, 7] $\forall f \in C_{2\pi}$ $\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt\right| < 2\pi^{-1}\omega_1\left(f, \frac{2\pi}{3n}\right)$. В случае $r = 2$, используя примеры работы [5], можно показать [9], что если в правой части (8) заменить $\omega_2(f, \pi/n)$ на $\omega_2(f, 2\pi/(3n))$, то $K_2(2\pi/(3n)) > \pi^{-1}$.

Доказательство теоремы 1. Оценка сверху для величины $A_r(\pi/n)$ в (4) содержится в [10]. Здесь докажем ее другим путем [11], который используем затем для доказательства теорем 2 и 2′.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать справедливость равенства (4) и при этом рассмотреть только функции $f \in C_{2\pi}$, r-й модуль непрерывности которых удовлетворяет условию

$$\omega_r(f, \pi/n) = 1. \tag{16}$$

Каждую функцию $f \in C_{2\pi}$ можно представить в виде [11]

$$f(x) = (-2)^{-r}\Delta^r_{\pi/n}f(x) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta^i_{\pi/n}f(x) + \sum_{i=0}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta^i_{\pi/n}f(x + \pi/n)\right). \tag{17}$$

Обозначим через $T^*_{n-1}(x)$ тригонометрический полином наилучшего приближения (порядка $n - 1$) функции $f \in C_{2\pi}$. Используя (17), получаем

$$\begin{aligned} f(x) - S_{n-1}(f, x) &= f(x) - T^*_{n-1}(x) - S_{n-1}(f - T^*_{n-1}, x) = f(x) - T^*_{n-1}(x) - \\ &- S_{n-1}((-2)^{-r}\Delta^r_{\pi/n}f, x) + (-2)^{-r}S_{n-1}(\Delta^r_{\pi/n}T^*_{n-1}, x) - \\ &- \frac{1}{2}\left(S_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta^i_{\pi/n}(f - T^*_{n-1}), x\right) + \right. \\ &\left. + S_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta^i_{\pi/n}(f - T_{n-1}, x + \pi/n)\right)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Известно (см., например, [12, 13]), что суммы Бернштейна $\frac{1}{2}[S_{n-1}(f, x) + S_{n-1}(f, x + \pi/n)]$ представляют собой линейный метод суммирования рядов Фурье. При этом

$$\frac{1}{2}\|S_{n-1}(f, x) + S_{n-1}(f, x + \pi/n)\| \leqslant C\|f\|, \quad C = \text{const}. \tag{19}$$

Как известно (см., например, [4, с. 204—210]),

$$\| f - T_n^*(f) \| < C_r \omega_r (f, \pi/n), \tag{20}$$

где C_r — постоянная*, не зависящая от f. Учитывая (16), (19) и (20), последние две суммы в (18) оценим следующим образом:

$$\frac{1}{2} \Big| S_{n-1} \Big(\sum_{i=0}^{r-1} (-2)^i \Delta_{\pi/n}^i (f - T_{n-1}^*), x \Big) + S_{n-1} \Big(\sum_{i=0}^{r-1} (-2)^{-i} \Delta_{\pi/n}^i (f - T_{n-1}^*),$$

$$x + \pi/n \Big) \Big| \leqslant Cr \| f - T_{n-1}^*(f) \| = O(1)\, \omega_r \left(f, \frac{\pi}{n} \right) = O(1). \tag{21}$$

Поскольку $\Delta_{\pi/n}^r T_{n-1}^*(x)$ — полином $(n-1)$-й степени, то получаем

$$|(-2)^{-r} S_{n-1} (\Delta_{\pi/n}^r T_{n-1}^*, x)| = |(-2)^{-r} \Delta_{\pi/n}^r T_{n-1}^*(x)| =$$

$$= |(-2)^{-r} \Delta_{\pi/n}^r (T_{n-1}^*(x) - f(x)) + (-2)^{-r} \Delta_{\pi/n}^r f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \| f - T_{n-1}^*(f) \| + |(-2)^{-r} \Delta_{\pi/n}^r f(x)| = O(1). \tag{22}$$

Из соотношений (18)—(22) для функций $f \in H_\omega^r(\pi/n)$ имеем

$$f(x) - S_{n-1}(f, x)| = (-2)^{-r} S_{n-1} (\Delta_{\pi/n}^r f, x) + O(1) = 2^{-r} \pi^{-1} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_{\pi/n}^r (f(x +$$

$$+ t) D_{n-1}(t)\, dt \Big| + O(1) \leqslant 2^{-r} \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |D_{n-1}(t)|\, dt + O(1).$$

Отсюда [2, с. 134] $\forall f \in H_\omega^r(\pi/n)$

$$|f(x) - S_{n-1}(f, x)| \leqslant r^{-r+2} \pi^{-2} \ln n + O(1).$$

Следовательно,

$$A_r(\pi/n) \leqslant 2^{-r+2} \pi^{-2} \ln n + O(1). \tag{23}$$

Далее, через $f_{n,r}(x, \varepsilon)$ обозначим непрерывную четную 2π-периодическую функцию, которая при произвольно малом $\varepsilon > 0$ на $[0, \pi]$ определена следующим образом:

$$f_{n,r}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/(2n) - \varepsilon/n], \cup [(n - 1/2)\pi/n + \varepsilon/n, \pi], \\ 2^{-r}, & x \in [\pi/(2n) + \varepsilon/n, \pi/n - \varepsilon/n], \\ (-1)^k 2^{-r}, & x \in [k\pi/n + \varepsilon/n, (k+1)\pi/n - \varepsilon/n], \ k = 1, \ldots, n-2, \\ -2^{-r}, \ x \in [(n-2)\pi/n + \varepsilon/n, (n - (3/2))\pi/n - \varepsilon/n], & n = 2p + 1, \\ 0, \ x \in [(n - (3/2))\pi/n + \varepsilon/n, \pi], \ n = 2p + 1, \ p = 1, 2, \ldots, & \\ (-2^{-r}, & x \in [(n-1)\pi/n + \varepsilon/n, (n - 1/2)\pi/n - \varepsilon/n], n = 2p \\ \text{на остальных отрезках } f_{n,r}(x, \varepsilon) \text{ линейна.} & \end{cases} \tag{24}$$

Очевидно, $\omega_r(f_{n,r}, \pi/n) = 1$. Согласно [2] с учетом леммы имеем

$$|f_{n,r}(0, \varepsilon) - S_{n-1}(f_{n,r}, 0)| = 2\pi^{-1} \Big| \int_0^{\pi} f_{n,r}(t, \varepsilon) \frac{\sin nt}{t}\, dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} f_{n,r}(t, \varepsilon) \sin nt \sin t / t^2 dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_{n,r}(t, \varepsilon) \left(\frac{\sin t}{t} - 1 \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{n,r}(t, \varepsilon) \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{n,r}(t, \varepsilon) \sin ntdt \right) \Big| = 2^{-r+2} \ln n + O(1).$$

* В случае $r = 2$ $C_2 = 1$ [14].

Отсюда следует
$$A_r(\pi/n)\geqslant 2^{-r+2}\ln n+O(1). \tag{25}$$
Из соотношений (23)—(25) следует справедливость (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В случае $r=1$ оценки (5), (6) следуют из работ [1, 2]. В [15] получена асимптотическая оценка, которая выражается через наилучшие приближения $f_\beta^\psi(x)$.

Для доказательства (5) необходимо установить справедливость (6). При этом достаточно рассмотреть только множество тех функций $f\in C_\beta^\psi C$, для которых выполняется условие $\omega_r(f_\beta^\psi,\pi/n)=1$.

Согласно [2, с. 98—100] имеем
$$\rho_n(f,x)\overset{\mathrm{df}}{=}f(x)-S_{n-1}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{n}\right)\mathcal{J}_2(t)\,dt+\frac{1}{2}A_n(f,x),$$
где
$$\mathcal{J}_2(t)=\int\limits_1^\infty\psi(nv)\cos(vt+\beta\pi/2)\,dv,$$
$$A_n(f,x)=a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx. \tag{26}$$
Поскольку $f\in C_\beta^\psi C$, то [2, с. 99]
$$a_k(f)=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t)\cos(kt+\beta\pi/2)\,dt, \tag{27}$$
$$b_k(f)=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t)\sin(kt+\beta\pi/2)\,dt. \tag{28}$$
Учитывая, что $f_\beta^\psi\in H_\omega^r\left(\frac{\pi}{n}\right)$, из (26), (28) в силу леммы получаем
$$\frac{1}{2}|A_n(f)|\leqslant\frac{1}{2}(|a_n(f)|+|b_n(f)|)<2^{-r+1}\pi^{-1}\psi(n). \tag{29}$$
Пусть $T_{n-1}^*(f_\beta^\psi,t)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции $f_\beta^\psi(t)$ и $f_\beta^\psi(t)-T_{n-1}^*(f_\beta^\psi,t)=R_{n-1}(f,t)$.

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_2(t)\,dt=0$ и для произвольного тригонометрического полинома $T_{n-1}(t)$ выполняется соотношение [2, 7] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_{n-1}\left(x+\frac{t}{n}\right)\mathcal{J}_2(t)\times$ $\times\,dt=0$, то, учитывая (17), и (29), имеем
$$\rho_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f_\beta^\psi(x+t/n)-T_{n-1}^*(x+t/n)]\,\mathcal{J}_2(t)\,dt+\frac{1}{2}A_n(f,x)=$$
$$=(-2)^{-r}\pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\Delta_{\pi/n}^rR_{n-1}(x+t/n)+\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=0}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta_{\pi/n}^iR_{n-1}(x+t/n)+$$
$$+\sum_{i=0}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta_{\pi/n}^iR_{n-1}(x+t/n+\pi/n)\Bigg)\Bigg]\,\mathcal{J}_2(t)\,dt+A_n(f,x)=$$
$$=(-2)^{-r}\pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_{\pi/n}^rf_\beta^\psi(x+t/n)\,\mathcal{J}_2(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\sum_{i=1}^{r-1}(-2)^{-i}\Delta_{\pi/n}^iR_{n-1}(x+$$
$$+t/n)(\mathcal{J}_2(t)+\mathcal{J}_2(t-\pi)\,dt+A_n(f,x)=I_1+I_2+O(1)\,\psi(n). \tag{30}$$

Покажем сначала, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt \leqslant K\psi(n), \quad K = \text{const}. \tag{31}$$

Известно [2, с. 96, 121], что

$$\int_{0}^{\mu(n)} |\mathcal{J}_2(t)|\, dt \leqslant K_5\psi(n),$$

$$\int_{\mu(n)}^{\infty} \left| \frac{n}{t} \int_{1}^{\infty} \psi'(nv) \sin(vt + \beta\pi/2)\, dv \right| dt \leqslant K_6\psi(n). \tag{32}$$

Из (32) следует

$$\int_{0}^{\mu(n)} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt \leqslant 3 \int_{0}^{\mu(n)} |\mathcal{J}_2(t)|\, dt \leqslant K_7\psi(n), \tag{33}$$

$$\int_{0}^{\mu(n)+\pi} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt \leqslant 3 \int_{0}^{\mu(n)} |\mathcal{J}_2(t)|\, dt + \int_{\mu(n)}^{\mu(n)+\pi} \left| \int_{1}^{\infty} \psi(nv) \cos(vt + \right.$$

$$\left. + \beta\pi/2)\, dv \right| dt \leqslant 3K_7\psi(n) + \int_{\mu(n)}^{\mu(n)+\pi} \left| \int_{1}^{x_1(t)} \psi(nv) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv \right| dt, \tag{34}$$

где $x_1(t)$ — ближайший справа от точки $x = 1$ нуль функции $\int_{x}^{\infty} \psi(nv) \cos \times$ $\times (vt + \beta\pi/2)\, dv$, при этом $1 \leqslant x_1(t) \leqslant 2\pi/t$ [1, с. 109]. Поэтому имеем

$$\int_{\mu(n)}^{\mu(n)+\pi} |\mathcal{J}_2(t)|\, dt \leqslant 2\pi^2\psi(n). \tag{35}$$

Таким образом, из (32) — (35) следует

$$\int_{0}^{\mu(n)+\pi} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt \leqslant K_8\psi(n). \tag{32'}$$

Далее из (32) получаем

$$\int_{\mu(n)+\pi}^{\infty} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt = \int_{\mu(n)+\pi}^{\infty} \left| \psi(n) \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t(t-\pi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{t} \int_{1}^{\infty} \psi'(nv) \sin(vt + \beta\pi/2)\, dv + \frac{n}{t-\pi} \int_{1}^{\infty} \psi'(nv) \sin(vt + \beta\pi/2)\, dv \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant K_9\psi(n). \tag{36}$$

Из соотношений (32′) и (36) следует

$$\int_{0}^{\infty} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt \leqslant K_{10}\psi(n). \tag{31'}$$

Аналогично оценивается интеграл $\int_{-\infty}^{0} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt$. Следовательно, соотношение (31) доказано.

Оценим теперь $|I_2|$ и $|I_1|$. Учитывая (31), имеем

$$|I_2| \leqslant r\pi^{-1} \| f_\beta^\psi - T_{n-1}^*(f_\beta^\psi) \| \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{J}_2(t) + \mathcal{J}_2(t-\pi)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_r \psi(n)\, \omega_r\left(f_\beta^\psi, \frac{\pi}{n}\right) = O(1)\, \psi(n), \tag{37}$$

K_r зависит только от r. Далее,

$$I_1 = (-2)^{-r} \int_{0 \leqslant |t| \leqslant \mu(n)} \Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n)\, \mathcal{J}_2(t)\, dt +$$

$$+ \int_{|t| \geqslant \mu(n)} \Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n)\, \mathcal{J}_2(t)\, dt \overset{\mathrm{df}}{=} I_1^1 + I_1^2. \tag{38}$$

Учитывая, что $\omega_r(f_\beta^\psi, \pi/n) = 1$, в силу (32) получаем

$$|I_1^1| \leqslant 2^{-r+3} \int_0^{\mu(n)} |\Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n)|\, |\mathcal{J}_2(t)|\, dt \leqslant K_{11} \psi(n). \tag{39}$$

Из соотношений (30) — (39) при $\psi \in \mathfrak{W}_c \cup \mathfrak{W}_\infty$ следует

$$\rho_n(f, x) = \pi^{-1} \int_{|t| \geqslant \mu(n)} (-2)^{-r} \Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n)\, \mathcal{J}_2(t)\, dt + O(1)\, \psi(n) =$$

$$= (-2)^{-r} \pi^{-1} \psi(n) \int_{|t| \geqslant \mu(n)} \Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n) \Big[\sin(t + \beta\pi/2)/t - n/t \times$$

$$\times \int_1^\infty \psi'(\pi v \ \sin(vt + \beta\pi/2)\, dv\Big]\, dt + O(1)\, \psi(n) = (-2)^{-r} \pi^{-1} \psi(n) \times$$

$$\times \int_{|t| \geqslant \mu(n)} \Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n) \sin(t + \beta\pi/2)/t dt + O(1)\, \psi(n). \tag{40}$$

Если $\mu(n) \geqslant n\pi$, то из соотношений (40), используя результаты [2, с. 110—111], получаем

$$|\rho_n(f, x)| = O(1)\, \omega_r(f_\beta^\psi, \pi/n)\, \psi(n) = O(1)\, \psi(n). \tag{41}$$

Пусть

$$\mu(n) \leqslant n\pi. \tag{42}$$

Тогда снова используя результаты [2, с. 110 — 114], при $f \in H_\omega^r(\pi/n)$ получаем

$$|\rho_n(f, x)| = 2^{-r} \pi^{-1} \psi(n) \left| \int_{|t| \geqslant \mu(n)} \Delta_{\pi/n}^r f_\beta^\psi(x + t/n - \beta\pi/2) \frac{\sin t}{t}\, dt \right| +$$

$$+ O(1)\, \psi(n) \leqslant 2^{-r+2} \pi^{-2} \ln \frac{n}{\mu(n)} + O(1)\, \psi(n). \tag{43}$$

Если положить $\ln^+ t = \max(\ln t, 0)$, $t > 0$, то из соотношений (41) — (43) будем иметь

$$A_r^\psi(\pi/n) \leqslant 2^{-r+2} \pi^{-2} \psi(n) [\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)]. \tag{44}$$

Обозначим через $f_{n,\varepsilon}^*(t)$ функцию, (ψ, β)-производная которой равна функции $f_{n,r}(t, \varepsilon)$, определенной соотношениями (24). Тогда $f_{n,\varepsilon\beta}^{*\ \psi}(t) \in \in H_\omega^r(\pi/n)$ и

$$|f_{n,\varepsilon}^*(0) - S_{n-1}(f_{n,\varepsilon}^*, 0)| = 2^{-r+2} \pi^{-2} \psi(n) [\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\, \psi(n)].$$

Отсюда следует

$$A_r^\psi(\pi/n) \geqslant 2^{-r+2} \pi^{-2} \psi(n) [\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)]. \tag{45}$$

Таким образом, из соотношений (44) и (45) следует справедливость соотношений (6). Теорема 3 доказана.

В случае $\psi \in \mathfrak{W}_0$ с использованием результатов [15, с. 503, 508] аналогично теореме 2 доказывается и теорема 2′.

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— **50**, № 2.— С. 101—136.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
3. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 6.— С. 755—762.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
5. *Ефимов А. В.* О коэффициентах Фурье функций класса $\tilde{H}_2^1$ // Успехи мат. наук.—1957.— **12**, вып. 3.— С. 303—311.
6. *Гаврилюк В. Т., Стечкин С. Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1978.— **241**, № 3.— С. 525—527.
7. *Милорадович С.* О верхних гранях коэффициентов Фурье и некоторых более общих функционалов // Мат. заметки.— 1982.— **32**, № 5.— С. 707—720.
8. *Гаврилюк В. Т., Стечкин С. Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1985.— **172**.— С. 107—127.
9. *Гаврилюк В. Т.* Оценки коэффициентов Фурье непрерывных периодических функций // Теория приближения функций и ее приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 38—51.
10. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций.— Л. : Ленингр. ун-т, 1982.— 366 с.
11. *Неваи Г. П.* Об отклонении тригонометрических интерполяционных сумм // Acta math. Acad. sci. hung.— 1972.— **23**, № 1-2.— С. 203—205.
12. *Бернштейн С. Н.* Об одном методе суммирования тригонометрических рядов: Собр. соч. Т. 1.— М. : Изд-во АН СССР, 1952.— С. 523—525.
13. *Тиман А. Ф.* О константах Лебега для некоторых методов суммирования // Докл. АН СССР.— 1948.— **61**, № 6.— С. 989—992.
14. *Шалаев В. В.* К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами // Исследования по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1977.— Вып. 8.— С. 39—43.
15. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 4.— С. 499—510.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.07.89