УДК 517.538.52

А. П. Голуб

Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде — Чебышева

Разработан подход к применению обобщенных моментных представлений В. К. Дзядыка в вопросах построения и исследования аппроксимант Паде—Чебышева. С его помощью изучены некоторые свойства аппроксимант Паде — Чебышева класса функций, являющегося естественным аналогом класса марковских функций. В частности доказано, что полюсы аппроксимант Паде — Чебышева этих функций лежат вне их области аналитичности.

Розроблено підхід до застосування узагальнених моментних представлень В. К. Дзядика в питаннях побудови і дослідження апроксимант Паде — Чебишова. За його допомогою вивчені деякі властивості апроксимант Паде — Чебишова класу функцій, який є природним аналогом класу марківських функцій. Зокрема доведено, що полюси апроксимант Паде — Чебишова цих функцій лежать поза їх областю аналітичності.

При изучении аппроксимаций Паде на первый план, как правило, выдвигаются функции вида

$$f(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\zeta)}{1-\zeta z}, \tag{1}$$

где $d\mu(\zeta)$ — некоторая мера на компакте $\Gamma\subset\mathbb{C}$. Это связано с классическими идеями П. Л. Чебышева, относящимися к проблеме моментов для числовой последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ (см., например, [1])

$$s_k=\int\limits_{\Gamma}\zeta^k d\mu(\zeta),\quad k=\overline{0,\infty}. \tag{2}$$

В случае неотрицательной меры $d\mu(\zeta)$ на действительном множестве многие вопросы рациональной аппроксимации функций вида (1) решаются в терминах многочленов, ортогональных по мере $d\mu(\zeta)$. Для расширения этого класса функций некоторые исследователи (см., например, [2, 3]) изучают свойства последовательностей ортогональных многочленов, соответствующих знакопеременным и комплекснозначным мерам. В. К. Дзядык в 1981 г. предложил иной путь, заключающийся в обобщении проблемы моментов (2).

Определение 1 [4]. *Обобщенным моментным представлением (ОМП) последовательности комплексных чисел* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *называется совокупность равенств*

$$s_{i+j}=\int\limits_{\Gamma}a_i(t)\,b_j(t)\,d\mu(t),\quad i,j=\overline{0,\infty}, \tag{3}$$

в которых Γ — *некоторое борелевское множество (чаще всего отрезок действительной оси),* $d\mu(t)$ — *мера на* Γ, $\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ *и* $\{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — *последовательности измеримых на* Γ *функций, для которых все интегралы в* (3) *существуют.*

В некоторых работах В. К. Дзядыка и автора указаны способы и примеры применения обобщенных моментных представлений к задачам аппроксимации Паде, многоточечных аппроксимаций Паде, совместных аппроксимаций Паде и др. В работах В. К. Дзядыка и М. Н. Чыпа с помощью ОМП получены интегральные представления для ряда специальных функций [5, гл. VI]. Эти применения основываются на преобразовании формулы (3) к виду

$$f(z)\,Q_N(z) - P_{N-1}(z) = z^N \int_{\Gamma} A(z,t)\,B_N(t)\,d\mu(t), \tag{4}$$

где

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \quad A(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t)\,z^i, \quad B_N(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} b_j(t),$$

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}, \quad P_{N-1}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k z^k.$$

Настоящая статья посвящена применению ОМП к задаче аппроксимации Паде — Чебышева, которое осуществляется несколько отличным от приведенного выше путем.

Определение 2 [6, с. 340]. *Пусть функция $f(x) \in C[-1, 1]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье — Чебышева вида*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(x), \tag{5}$$

где $T_k(x) = \cos k \arccos x$ — многочлены Чебышева первого рода. Аппроксимантой Паде — Чебышева функции $f(x)$ порядка $[M/N]$ называется рациональный полином $[M/N]_f^{\tau}(x) = P_M(x)/Q_N(x) \in R[M/N] := \{r(x) : r(x) = p(x)/q(x), \deg p(x) = M, \deg q(x) = N\}$ такой, что имеет место разложение

$$f(x)\,Q_N(x) - P_M(x) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(x). \tag{6}$$

Следующая теорема устанавливает связь между ОМП и аппроксимациями Паде — Чебышева.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье — Чебышева вида* (5) *и при этом последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что имеет место ОМП вида*

$$s_{i+j} = \int_{\Gamma} a_i(t)\,b_j(t)\,d\mu(t), \quad i = \overline{0, \infty}. \tag{7}$$

Пусть, кроме того, при некоторых целых $M \geqslant N \geqslant 0$ отличен от нуля определитель

$$\Delta[M/N] = \det \| s_{M+1+i+j} + s_{M+1+i-j} \|_{i,j=0}^{N} \neq 0. \tag{8}$$

Тогда аппроксиманта Паде — Чебышева функции $f(z)$ порядка $[M/N]$ представима в виде

$$[M/N]_f^{\tau}(x) = P_M(x)/Q_N(x), \tag{9}$$

где

$$Q_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_j(x), \tag{10}$$

$$P_M(x) = \frac{1}{2} s_0 \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_j(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_j + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M} T_i(x) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} [s_{i+j} + s_{|i-j|}], \tag{11}$$

а коэффициенты $c_j^{(N)}$, $j=\overline{0, N}$, не все равные нулю, определяются из условий биортогональности для полинома

$$B_N(t)=\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}\left[b_{M+1+j}(t)+b_{M+1-j}(t)\right],$$
$$\int_\Gamma a_i(t)\, B_N(t)\, d\mu(t)=0, \quad i=\overline{0, N-1}. \tag{12}$$

Погрешность приближения имеет интегральное представление

$$f(z)\, Q_N(z)-P_M(z)=\frac{1}{2}\int_\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} T_{k+M+1}(z)\, a_k(t)\, B_N(t)\, d\mu(t). \tag{13}$$

Доказательство. Учитывая (5) и (10), получаем

$$f(x)\, Q_N(x)=\sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(x) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_j(x)=\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} s_k\left[T_{k+j}(x)+T_{|k-j|}(x)\right]=$$
$$=\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}\left[s_{k+j}+s_{|k-j|}\right]-\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_j T_0(x)+\frac{1}{2} s_0 \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_j(x)=$$
$$=P_M(x)+\frac{1}{2} \sum_{k=M+1}^{\infty} T_k(x) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}\left[s_{k+j}+s_{k-j}\right]=P_M(x)+$$
$$+\frac{1}{2} \int_\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} T_{k+M+1}(x)\, a_k(t)\, B_N(t)\, d\mu(t).$$

Из последнего равенства следуют все утверждения теоремы.

Рассмотрим в качестве примера класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x)=\int_\alpha^\beta \frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\, d\mu(t), \tag{14}$$

где $d\mu(t)$ — положительная мера на отрезке $[\alpha, \beta] \subset[-1,1]$. Так как $\dfrac{1-xt}{1-2xt+t^2}$ — производящая функция многочленов Чебышева первого рода, то в разложении

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(x) \tag{15}$$

коэффициенты будут иметь вид

$$s_k=\int_\alpha^\beta t^k d\mu(t), \quad k=\overline{0, \infty}. \tag{16}$$

Равенства (16) можно переписать в виде

$$s_{i+j}=\int_\alpha^\beta t^i t^j d\mu(t), \quad i, j=\overline{0, \infty}. \tag{17}$$

Чтобы построить в соответствии с теоремой 1 аппроксиманту Паде — Чебышева функции $f(x)$ порядка $[M/N]$, $M \geqslant N \geqslant 0$, необходимо построить биортогональный полином

$$B_N(t)=t^{M+1} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}\left(t^j+t^{-j}\right), \tag{18}$$

удовлетворяющий условиям

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^i B_N(t)\, d\mu(t) = 0, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что полином $B_N(t)/t^{M+1}$ будет алгебраическим многочленом степени N от переменной $t + 1/t$. Обозначим его через $U_N(x)$. Итак,

$$\frac{B_N(t)}{t^{M+1}} = U_N\left(t + \frac{1}{t}\right). \tag{20}$$

Так, биортогонализация (18), (19) очевидным образом сводится к биортогонализации систем функций $\{t^k\}_{k=0}^{N}$ и $\{t^{M+1}(t + 1/t)^j\}_{j=0}^{N}$ по мере $d\mu(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Так как обе системы функций являются чебышевскими на $[-1, 1]$, то в данной ситуации невырожденная биортогонализация возможна. Более того, при этом полином $U_N(t + 1/t)$ будет иметь на (α, β) точно N простых нулей [7]. Рассмотрим теперь

$$U_N(2z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} [(z - \sqrt{z^2 - 1})^j + (z + \sqrt{z^2 - 1})^j] =$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_j(z) = 2Q_N(z). \tag{21}$$

Таким образом, знаменатель аппроксиманты Паде — Чебышева будет иметь вид

$$Q_N(z) = \frac{1}{2} U_N(2z). \tag{22}$$

Учитывая, что $U_N(t + 1/t)$ имеет N корней на (α, β), заключаем, что все корни знаменателя $Q_N(z)$ располагаются на промежутке $(\beta + 1/\beta, \alpha + 1/\alpha)$, если $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, на луче $(\beta + 1/\beta, +\infty)$, если $0 = \alpha < \beta \leqslant 1$, на луче $(-\infty, \alpha + 1/\alpha)$, если $-1 \leqslant \alpha < \beta = 0$ и на объединении лучей $(-\infty, \alpha + 1/\alpha) \cup (\beta + 1/\beta, +\infty)$, если $-1 \leqslant \alpha < 0 < \beta < 1$.

Подытоживая приведенные выше рассуждения, сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде*

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}\, d\mu(t), \tag{23}$$

где $\mu(t)$ — неубывающая и имеющая бесконечное число точек роста на $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$ функция. Тогда аппроксиманта Паде — Чебышева функции $f(x)$ порядка $[M/N]$, $M \geqslant N \geqslant 0$, является функцией аналитической в естественной области аналитичности функции $f(x)$ и представима в виде

$$[M/N]_f^T(x) = P_M(x)/Q_N(x), \tag{24}$$

где

$$Q_N(x) = \frac{1}{2} U_N(2x), \tag{25}$$

$$P_M(x) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{(1 - xt)(U_N(2x) - U_N(t + 1/t))}{1 - 2xt + t^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{M} t^k T_k(x) U_N(t + 1/t) \right] d\mu(t), \tag{26}$$

а алгебраические многочлены $U_N(t)$ определяются соотношениями биортогональности

$$\int_\alpha^\beta t^{M+1+i} U_N(t + 1/t)\, d\mu(t) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (27)$$

Доказательство. Используя формулы (23) и (25), записываем

$$f(x) Q_N(x) = Q_N(x) \int_\alpha^\beta \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} d\mu(t) = Q_N(x) \left[\int_\alpha^\beta \left(\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{M} t^k T_k(x) \right) d\mu(x) + \sum_{k=0}^{M} s_k T_k(x) \right] = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left(\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{M} t^k T_k(x) \right) U_N(2x)\, d\mu(t) + Q_N(x) \sum_{k=0}^{M} s_k T_k(x) = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \int_\alpha^\beta \left(\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_k(x) \right) [U_N(2x) - U_N(t + 1/t)]\, d\mu(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left(\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_k(x) \right) U_N(t + 1/t)\, d\mu(t) + Q_N(x) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{M} s_k T_k(x) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left[\frac{(1 - xt)[U_N(2x) - U_N(t + 1/t)]}{1 - 2x + t^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{M} t^k T_k(x)\, U_N(t + 1/t) \right] d\mu(t) + R_{M+N+1}(x).$$

Отсюда следует доказательство теоремы.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.— М. : Наука, 1961.— 312 с.
2. *Stahl H.* Orthogonal polynomials of complex-valued measures and the convergence of Padé approximants // Fourier Anal. and Approxim. Theory.— Amsterdam: North Holland, 1978.— V. II.— P. 771—788.
3. *Gilewicz J., Leopold E.* Location of the zeros of polynomials satisfying threeterm reccurence relations. I. General case with complex coefficients // J. Approxim. Theory.— 1985.— 43, N 1.— P. 1—14.
4. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 6.— С. 8—12.
5. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1988.— 304 с.
6. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде.— М. : Мир, 1986.— 502 с.
7. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации.— Киев, 1987.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.25).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.01.89