УДК 517.5

В. П. Моторный

Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1

Получены асимптотически точные оценки уклонений интерполяционных многочленов по равноотстоящим узлам на некоторых классах функций в L_1-норме.

Одержані асимптотично точні оцінки відхилень інтерполяційних многочленів з рівновіддаленими вузлами на деяких класах функцій в L_1-нормі.

Пусть $f(x)$—2π-периодическая интегрируемая по Риману функция, $\mathscr{L}_n(f;x)$— тригонометрический полином степени n, интерполирующий $f(x)$ в точках $x_k^{(n)}=2\pi k/(2n+1)$, $k=0, 1, \ldots, 2n$. Известно [1], что для любого $p\in[1,\infty)$ $\mathscr{L}_n(f;x)$ сходится к $f(x)$ в метрике пространства L_p (L_p — пространство измеримых функций, интегрируемых по Лебегу в степени p). Оценки порядка сходимости $\mathscr{L}_n(f;x)$ к $f(x)$ в L_p, выраженные в терминах модуля гладкости, усредненного модуля непрерывности и в терминах последовательностей наилучших приближений функции в L_p, получены в [2] и [3].

В пространстве $\mathbb{C}$ непрерывных периодических функций [4] даны асимптотически точные оценки функций Лебега интерполяционных полиномов $\mathscr{L}_n(f; x)$ и верхних граней уклонений в точке x интерполяционных многочленов от функций классов H^ω и W^r, r — натуральное число. Класс W^r состоит из функций, $r-1$ производная которых абсолютно непрерывна и $|f_{(x)}^{(r)}| \leqslant 1$ почти всюду, H^ω — класс функций с заданной мажорантой модуля непрерывности. В дальнейшем будет необходима одна из них:

$$\sup_{f \in W^1} |f(x) - \mathscr{L}_n(f; x)| = \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|}{n} \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

В настоящей статье получены асимптотически точные оценки уклонений интерполяционных многочленов на некоторых классах функций в пространстве L_1.

Введем некоторые обозначения и сформулируем вспомогательные утверждения.

1. $f_n(x) = f(x_k^{(n)})$, $\quad x_k^{(n)} \leqslant x < x_{k+1}^{(n)}$, где $f(x)$ — 2π-периодическая интегрируемая по Риману функция.

2. Пусть $m_k = \inf\limits_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} f(x)$ и $\omega_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{2n} (M_k - m_k)$; $\dfrac{2\pi}{2n+1}\omega_n(f)$ — разность сумм Дарбу функции f, соответствующих последовательности разбиений $\{x_k^{(n)}\}$. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации и $V(f)$ — полное изменение функц и на отрезке $[0, 2\pi]$, то $\omega_n(f) \leqslant V(f)$.

3. $\mathscr{L}_n(f; x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)}) l_k(x)$, где $l_k(x)$ выражаются через ядро Дирихле $D_n(x)$: $l_k(x) = \dfrac{2}{2n+1} D_n(x - x_k^{(n)})$. Для ядер Дирихле известно асимптотическое равенство

$$\|D_n(x)\| = \frac{4}{\pi} \ln n + O(1). \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем норма берется в пространстве L_1.

Лемма 1. *Для любых* $x \in [0, 2\pi]$, $0 \leqslant t < 2\pi/(2n+1)$ *и* $x_m^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)} + x_m^{(n)} + t)\, l_k(x) = \sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)})\, l_k(x + x_m^{(n)}).$$

Доказательство. Из определения функции $f_n(x)$ следует равенство

$$\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)} + x_m^{(n)} + t)\, l_k(x) = \sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)} + x_m^{(n)})\, l_k(x),$$

правая часть которого равна в силу определения точек $x_k^{(n)}$ $\sum\limits_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)}) \times$ $\times\, l_k(x + x_m^{(n)})$.

Лемма 2. *Для любой интегрируемой по Риману функции* $f(x)$ *и любого* $t > 0$

$$\|f(\cdot + t) - \mathscr{L}_n(f)\| \geqslant \|f - \mathscr{L}_n(f)\| - \omega(f; t)_1,$$

где $\omega(f; t)_1$ *— интегральный модуль непрерывности функции* $f(x)$.

Доказательство очевидно:

$$\|f-\mathscr{L}_n(f)\| = \|f(\cdot+t)-\mathscr{L}_n(f)+f-f(\cdot+t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(\cdot+t)-\mathscr{L}_n(f)\|+\omega(f;t)_1.$$

Лемма 3. *Имеет место неравенство*

$$\omega(f_n;\ t)_1 \leqslant \omega_n(f)\,t,$$

в частности, если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то

$$\omega(f_n;t)_1 \leqslant V(f)\,t. \tag{3}$$

Лемма доказывается просто. В более общем случае, когда вместо $\omega(f_n;t)_1$ рассматривается $\omega(f;t)_1$, неравенство (3) известно [5, 6].

Теорема 1. *Для любой интегрируемой по Риману функции имеет место неравенство*

$$\|f-\mathscr{L}_n(f)\| \leqslant \frac{2\omega_n(f)\ln n}{\pi n}+C\frac{\omega_n(f)}{n}, \tag{4}$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство. Так как

$$\|f-f_n\| \leqslant \omega_n(f)\frac{\pi}{n} \text{ и } \mathscr{L}_n(f;x)=\mathscr{L}_n(f_n;x),$$

то, чтобы доказать теорему, установим неравенство

$$\|f_n-\mathscr{L}_n(f_n)\| \leqslant \frac{2\omega_n(f)\ln n}{\pi n}+C_1\frac{\omega_n(f)}{n}.$$

С этой целью для любого $t\in[0,\ 2\pi]$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\left\|f_n(\cdot+t)-\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)}+t)\,l_k(\cdot)\right\|.$$

Если $0\leqslant t<2\pi/(2n+1)$, то $f_n(x_k^{(n)}+t)=f_n(x_k^{(n)})$ и

$$\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)}+t)\,l_k(x)=\mathscr{L}_n(f_n;x).$$

Используя леммы 2 и 3, получаем

$$\varphi(t)=\|f_n(\cdot+t)-\mathscr{L}_n(f_n)\| \geqslant \|f_n-\mathscr{L}_n(f_n)\|-\frac{\pi}{n}\omega_n(f).$$

Пусть теперь $t=x_m^{(n)}+y$, где $0\leqslant y<2\pi/(2n+1)$. Тогда в силу леммы 1 и инвариантности нормы относительно сдвига

$$\varphi(t)=\left\|f_n(\cdot+t)-\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)}+x_m^{(n)}+y)\,l_k(\cdot)\right\| =$$
$$=\left\|f_n(x+x_m^{(n)}+y)-\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)})\,l_k(x+x_m^{(n)})\right\| =$$
$$=\|f_n(x+y)-\mathscr{L}_n(f_n;x)\| \geqslant \|f_n-\mathscr{L}_n(f_n)\|-\frac{\pi}{n}\omega_n(f).$$

Из оценки для функции $\varphi(t)$ следует

$$a_n=2\pi\left(\|f_n-\mathscr{L}_n(f_n)\|-\frac{\pi}{n}\omega_n(f)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f_n(x+t)-\sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)}+t)\,l_k(x)\right]g(t,x)\,dxdt,$$

где

$$g(t, x) = \operatorname{sign}\left[f_n(x+t) - \sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)} + t)\, l_k(x)\right].$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$a_n \leqslant \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} \left[f_n(x+t) - \sum_{k=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)} + t)\, l_k(x)\right] g(t, x)\, dt. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $F_n(x, y)$ переменных x, y, определенную равенством

$$F_n(x, y) = \int_0^{2\pi} f_n(x+t)\, g(t, y)\, dt.$$

При фиксированном y функция $F_n(x, y)$ непрерывна по x и ее модуль непрерывности $\omega(F_n; \delta)_C$ по переменной x равномерно относительно y в силу леммы 3 удовлетворяет неравенству

$$\omega(F_n; \delta)_C \leqslant \omega(f_n; \delta)_1 \leqslant \omega_n(f)\, \delta.$$

Следовательно, для любого y в силу соотношения (1) имеем

$$|F_n(x, y) - \mathscr{L}_n(F_n; x)| \leqslant \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right|}{n}\, \omega_n(f) \ln n + \frac{C_0 \omega_n(f)}{n},$$

где C_0 — некоторая постоянная.

Внутренний интеграл в (5) — это значение разности $F_n(x, y) - \mathscr{L}_n(F_n(\cdot, y); x)$ на диагонали $x = y$. Поэтому

$$a_n \leqslant \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right| dx\, \frac{\omega_n(f) \ln n}{n} + \frac{2\pi C_0 \omega_n(f)}{n} =$$

$$= \frac{4\omega_n(f) \ln n}{n} + \frac{2\pi C_0 \omega_n(f)}{n}.$$

А тогда

$$\| f_n - \mathscr{L}_n(f) \| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n}\, \omega_n(f) + \frac{C_1 \omega_n(f)}{n},$$

где $C_1 = C_0 + 1$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2 будет следовать точность неравенства (4) в том смысле, что для всех функций константу $2/\pi$ в правой части неравенства (4) уменьшить нельзя.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\sup_{f \in V} \| f - \mathscr{L}_n(f) \| = \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6}$$

где V — класс функций, вариация которых на отрезке $[0, 2\pi]$ *не превышает* 1.

Доказательство. Для любой функции, вариация которой не превышает 1 в силу (3) и теоремы 1 имеет место неравенство

$$\| f - \mathscr{L}_n(f) \| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n} + \frac{C}{n}. \tag{7}$$

Рассмотрим 2π-периодическую функцию $f_0(x)$, равную 0 всюду, за исключением точек $2k\pi$, где она принимает значение 0,5. Тогда $V(f_0) = 1$, $\mathscr{L}_n(f_0; x) = D_n(x)/(2n+1)$ и в силу (2)

$$\| f_0 - \mathscr{L}_n(f_0) \| = \| \mathscr{L}_n(f_0) \| = \frac{1}{2n+1} \| D_n(x) \| = \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует (6).

Теорема 3. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна и $E_n^0(f')_1$ — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами (со средним значением, равным нулю) производной $f'(x)$ в L_1, то*

$$\| f - \mathscr{L}_n(f) \| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n} E_n^0(f')_1 + C_2\left(\frac{E_n^0(f')_1}{n} \right), \tag{9}$$

где C_2 — некоторая постоянная. Неравенство (9) *является точным в том же смысле, что и неравенство* (4).

Доказательство. Пусть $q_n(x)$ — многочлен (со средним значением, равным нулю) наилучшего приближения $f'(x)$ в L_1. Тогда по теореме 1

$$\| f - \mathscr{L}_n(f) \| = \| f - Q_n - \mathscr{L}_n(f - Q_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi} \omega_n(f - Q_n) \frac{\ln n}{n} + C \frac{\omega_n(f - Q_n)}{n}. \tag{10}$$

Здесь $Q_n(x)$ — первообразная $q_n(x)$.

Так как

$$\omega_n(f - Q_n) \leqslant V(f - Q_n) = \| f' - q_n \| = E_n^0(f')_1,$$

то из (10) следует (9). Чтобы доказать точность неравенства (9), рассмотрим для любого натурального n четную, в точке $2\pi/(2n+1)$ равную нулю, 2π-периодическую функцию, производная которой $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dx} \omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} - 2x \right)$, если $0 < x < \frac{2\pi}{2n+1}$, и $f'(x) = 0$, если $2\pi/(2n+1) < x < \pi$, где $\omega(t)$ — некоторый выпуклый модуля непрерывности. Тогда

$$E_n^0(f')_1 \leqslant \| f' \| = \omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} \right), \quad \| f \| = O\left(\frac{\omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} \right)}{n} \right),$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} \right), \quad \mathscr{L}_n(f; x) = \frac{1}{2n+1} \omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} \right) D_n(x)$$

и

$$\| f - \mathscr{L}_n(f) \| \geqslant \| \mathscr{L}_n(f) \| - \| f \| \geqslant \omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} \right) \frac{2 \ln n}{\pi n} +$$
$$+ \frac{C_3 \omega\left(\frac{4\pi}{2n+1} \right)}{n} \geqslant \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n} E_n^0(f')_1 + \frac{C_3 E_n^0(f')_1}{n}.$$

Теорема доказана.

Пусть W_1^r — класс функций, $r-1$ производная которых абсолютно непрерывна и $\| f^{(r)} \| \leqslant 1$. Из теоремы 3 следует неравенство

$$\sup_{f \in W_1^r} \| f - \mathscr{L}_n(f) \| \leqslant \frac{2K_{r-1} \ln n}{\pi n^r} + \frac{C}{n^r}, \tag{11}$$

где K_r — константы Фавара, C — некоторая постоянная.

Действительно, если $f \in W_1^r$, то в силу теоремы С. М. Никольского [7]

$$E_n^0(f')_1 \leqslant \frac{K_{r-1}}{n^{r-1}},$$

а тогда из (9) следует (11). При $r = 2$ в (11) имеет место асимптотическое равенство. Чтобы это доказать, достаточно взять $\omega(t) = (1/4)\, t$ при построении функции, дающей оценку снизу в теореме 3.

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 2.— 537 с.
2. *Христов В. Х.* О сходимости некоторых интерполяционных процессов в интегральных и дискретных нормах // Конструктивная теория функций.— София, 1983.— С. 185—188.
3. *Осколков К. И.* Неравенства типа «большого решета» и приложения к задачам тригонометрической аппроксимации // Anal. math.— 1986.— **12**, № 2.— P. 143—166.
4. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— **15**.— С. 3—76.
5. *Голубов Б. И.* Ряды Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**, № 6.— С. 1271—1296.
6. *Хомутенко Л. Г.* Точные оценки коэффициентов Фурье по системе Хаара функций с ограниченным изменением // Мат. заметки.— 1971.— **9**, № 3.— С. 355—363.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— **10**, № 3.— С. 207—256.

Днепропетр. ун-т Получено 26.05.89