УДК 512.546

С. П. Панасюк

Нормальность в пространстве подгрупп группы Ли

Доказано, что связная группа Ли разрешима тогда и только тогда, когда пространство замкнутых подгрупп этой группы в топологии Вьеториса нормально и всякий компактный отрезок подгрупп, лежащий в этом пространстве, счетен.

Доведено, що зв'язна група Лі, яку можна розв'язати тоді і тільки тоді, коли простір замкнутих підгруп цієї групи в топології В'єторіса нормальний і всякий компактний відрізок, який лежить у цьому просторі, зліченний.

Под группой Ли понимаем локально компактную группу, допускающую аналитическую структуру над полем вещественных чисел. Если G — группа Ли, то $l(G)$ — ее алгебра Ли. Пусть X — подмножество группы G. Тогда $\langle X \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством X, $\overline{X}$ — замыкание множества X в пространстве группы G. Аналогично обозначается замыкание множеств и в других топологических пространствах.

Заметим, что пространство замкнутых подмножеств топологического пространства нормально тогда и только тогда, когда само топологическое пространство компактно [1].

Предбазу топологии Вьеториса в пространстве замкнутых подгрупп $\mathfrak{L}(G)$ группы G образуют множества

$$D_1(U) = \{H \in \mathfrak{L}(G) \mid H \subseteq U\},$$

$$D_2(V) = \{H \in \mathfrak{L}(G) \mid H \cap V \neq \varnothing\},$$

где U и V пробегают открытые подмножества группы G [2]. Если H_1 и H_2 — подгруппы группы G такие, что $H_1 \subseteq H_2$, то $[H_1, H_2] = \{H \in \mathfrak{L}(G) \mid H_1 \subseteq H \subseteq H_2\}$, $\langle e \rangle$ — единичная подгруппа. В настоящей статье используем следующий факт для связных групп Ли: пространство $\mathfrak{L}(G)$ связной разрешимой группы Ли G метризуемо полной метрикой и сильно паракомпактно [3].

Пример 1. Пусть группа G дискретна и является прямым произведением нетривиальных циклических групп

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle,\ a_i \neq e,\ i = \overline{1, \infty}.$$

Тогда пространство $\mathfrak{L}(G)$ не нормально и не полно по Чеху. Каждому подмножеству множества индексов поставим в соответствие подгруппу группы G, порожденную элементами с индексами из этого подмножества. Легко проверить, что тем самым замкнутым образом вложена экспонента (пространство замкнутых подмножеств) счетного дискретного пространства в пространство замкнутых подгрупп $\mathfrak{L}(G)$. Поскольку экспонента счетного дискретного пространства суть не нормальное [4] и неполное по Чеху пространство [5] (в экспоненту можно замкнутым образом вложить прямую Зоргенфрея, а она не полна по Чеху [6]), то таково же и пространство $\mathfrak{L}(G)$.

Пример 2. Пусть F_2 — свободная дискретная группа ранга 2. Тогда пространство $\mathfrak{L}(F_2)$ не нормально и не полно по Чеху. Группа F_2 содержит F_∞ — свободную подгруппу бесконечного ранга [7]. Отрезок $[\langle e\rangle, F_\infty]$ замкнут в $\mathfrak{L}(F_2)$ и гомеоморфен $\mathfrak{L}(F_\infty)$ [2]. Пусть N — нормальный делитель F_∞ такой, что F_∞/N — свободная абелева группа бесконечного ранга. Отрезок $[N, F_\infty]$ замкнут в $\mathfrak{L}(F_2)$ и гомеоморфен $\mathfrak{L}(F_\infty/N)$ [2]. В силу примера 1 $[N, F_\infty]$ — не нормальное и не полное по Чеху пространство. Следовательно, таково же и пространство $\mathfrak{L}(F_2)$.

Лемма 1. *Пусть N — связная полупростая группа Ли. Если N некомпактна, то она содержит замкнутую подгруппу, изоморфную F_2.*

Доказательство. Рассмотрим присоединенное представление $\mathrm{Ad}\, N \to \mathrm{Aut}\, l(N)$. Так как N полупроста, ядро этого представления дискретно (если $\mathrm{Ad}(\exp tX)\, Y = Y$, $\forall Y \in l(N)$, то, дифференцируя по t при $t = 0$, имеем $\mathrm{ad}(X)\, Y = [X, Y] = 0$, $\forall Y \in l(N)$; тогда X принадлежит центру $l(N)$ и в силу полупростоты $X = 0$), и значит, центрально. Всякая полупростая связная подгруппа линейной группы замкнута [8]. Тогда $\mathrm{Ad}(N)$ замкнута в $\mathrm{Aut}\, l(N)$; $\mathrm{Ad}(N)$ локально изоморфна N и имеет ту же алгебру Ли $l(N)$. Так как N некомпактна, $l(N)$ содержит элемент X такой, что $\mathrm{ad}\, X$ — нильпотентное преобразование [9, предложение 14.3]. Тогда по теореме Джекобсона — Морозова [10] алгебра $l(N)$ содержит подалгебру, изоморфную $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathrm{Ad}(N)$ содержит интегральную подгруппу P, локально изоморфную $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Так как P полупроста, P замкнута в $\mathrm{Aut}\, l(N)$ и в $\mathrm{Ad}(N)$ [8]. Если $\tilde{P}$ — односвязная накрывающая группы P, то она — односвязная накрывающая группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ содержит дискретную замкнутую подгруппу, изоморфную F_2 $(=M)$ [7].

Но тогда $\tilde{P}$ содержит подгруппу, изоморфную $F_2 (= \tilde{M})$. (Если a, b — образующие F_2 в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\varphi: \tilde{P} \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ — накрывающий гомоморфизм, $\tilde{a} \in \varphi^{-1}(a)$, $\tilde{b} \in \varphi^{-1}(b)$, то $\tilde{a}, \tilde{b}$ — образующие $\tilde{M}$.) Если Z — центр $\tilde{P}$, то подгруппа $Z\tilde{M}$ замкнута в $\tilde{P}$ (в частности, $\tilde{M}$ замкнута в $\tilde{P}$). Действительно, если $\overline{Z\tilde{M}} \neq Z\tilde{M}$, то $(\overline{Z\tilde{M}})_0 \neq e$ и $\varphi(\overline{Z\tilde{M}})_0 \neq e$ (ядро K гомоморфизма $\varphi: \tilde{P} \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ дискретно). Но $\varphi(\overline{Z\tilde{M}}) \subseteq \overline{\varphi(Z\tilde{M})} \subseteq \overline{Z'M}$, где Z' — центр $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Центр Z' — конечен, и $Z'M$ — дискретная замкнутая подгруппа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Получено противоречие.

Пусть K' — ядро гомоморфизма $\bar{\varphi}; \tilde{P} \to P$. Тогда $K' \subseteq Z$, $K'\tilde{M}$ замкнута в $\tilde{P}$, а $K'\tilde{M}/K' \simeq \tilde{M}/K' \cap \tilde{M} \simeq \tilde{M}$ [11, п. 5.33], $\bar{\varphi}(\tilde{M}) = K'\tilde{M}/K' \simeq \simeq \tilde{M} \simeq F_2$ $(K' \cap \tilde{M} \subseteq Z \cap \tilde{M} = e$, так как $\tilde{M} \simeq F_2)$, т. е. содержит замкнутую подгруппу, изоморфную F_2. Если c и d — образующие этой подгруппы, $\tilde{c} \in \mathrm{Ad}^{-1}(c)$, $\tilde{d} \in \mathrm{Ad}^{-1}(d)$, то $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ — образующие искомой подгруппы в N (доказательстве замкнутости проводится как и выше). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть G — группа Ли и пространство $\mathfrak{L}(G)$ нормально (или полно по Чеху), связная компонента G_0 представима в виде $G_0 = RN$, где R — радикал G_0, N — фактор Леви. Тогда N — компакт.*

Доказательство следует из леммы 1 и примера 2.

Заметим, что при доказательстве теоремы не использовалась альтернатива Титса.

Перейдем теперь к формулировкам и доказательствам основных следствий доказанной выше теоремы и результатов [3].

Следствие 1 (критерий разрешимости). *Пусть G — связная группа Ли. Тогда следующие условия эквивалентны: а) группа G разрешима; б) пространство $\mathfrak{L}(G)$ нормально и всякий компактный отрезок $[\langle e\rangle, H] \subseteq \mathfrak{L}(G)$ счетен; в) пространство $\mathfrak{L}(G)$ полно по Чеху и всякий* *компактный отрезок* $[\langle e\rangle, H] \subseteq \mathfrak{L}(G)$ *счетен; г) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *метризуемо и всякий компактный отрезок* $[\langle e\rangle, H] \subseteq \mathfrak{L}(G)$ *счетен.*

Доказательство. Отрезок $[\langle e\rangle, H]$ компактен, если и только если подгруппа H компактна [2] (группа G не может содержать подгрупп типа $C_{p\infty}$ [9]). Если H абелева, $H \simeq \mathbf{T}^m \times K$, и группа характеров H суть $\mathbb{Z}^m \times K$, то K — конечная абелева группа, π — группа вращений окружности, $\mathbb{Z}$ — свободная абелева группа ранга 1, а значит, подгруппа H содержит счетное число замкнутых подгрупп. Если H связна и полупроста, T — максимальный тор в H, то нормализатор T в H не совпадает с H и отрезок $[\langle e\rangle, H]$ несчетен. Следствие доказано.

Следствие 2 (критерий полупростоты). *Связная группа Ли G полупроста, если и только если всякий отрезок* $[\langle e\rangle, N]$, *где* N — *связная замкнутая инвариантная подгруппа группы G, либо не нормален, либо компактен и несчетен.*

Доказательство очевидно.

Следствие 3 (критерий компактности). *Пусть G — связная полупростая группа Ли. Следующие условия эквивалентны: а) группа G компактна; б) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *нормально; в) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *метризуемо; г) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *полно по Чеху; д) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *компактно.*

Доказательство очевидно.

Замечание. Условие д) последнего следствия — это условие компактности группы G из [2]. Результат следствия 1 приведен в тезисах доклада [12] в более полной формулировке (все пункты этих тезисов, не отмеченные в данной статье, доказываются так же). В [13] приведены соответствующие результаты для комплексных групп Ли и алгебраических групп.

Следствие 4 (критерий разрешимости). *Пусть G — связная комплексная группа Ли. Следующие условия эквивалентны: а) группа G разрешима; б) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *нормально; в) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *метризуемо; г) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *полно по Чеху.*

Доказательство очевидно

Следствие 5 (критерий почти-разрешимости). *Пусть G — алгебраическая* $\mathbb{C}$*-группа, рассматриваемая в топологии группы Ли. Следующие условия эквивалентны: а) связная компонента* G_0 *группы G разрешима; б) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *нормально; в) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *метризуемо; г) пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *полно по Чеху.*

Доказательство очевидно [3].

Вопрос. Верно ли, что для связной группы Ли понятия нормальности и метризуемости пространства замкнутых подгрупп этой группы в топологии Вьеториса эквивалентны?

1. *Величко Н. В.* О пространстве замкнутых подмножеств // Сиб. мат. журн.— 1975.— **16**, № 3.— С. 627—629.
2. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2. — С. 378—385.
3. *Панасюк С. П.* Метризуемость в пространстве подгрупп группы Ли // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 3.— С. 351—356.
4. *Иванова В. М.* К теории пространств подмножеств // Докл. АН СССР.— 1955.— **101**, № 4.— С. 601—603.
5. *Попов В. В.* О пространстве замкнутых подмножеств // Там же.— 1976.— **229**, № 5.— С. 1145—1149.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М. : Мир, 1986.— 752 с.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1976.— 384 с.
8. *Мальцев А. И.* Избранные труды: В 2-х т.— М. : Наука, 1976.— Т. 1.— 482 с.
9. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли.— М.: Мир, 1977.— 320 с.
10. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. VII—VIII.— М. : Мир, 1978.— 496 с.
11. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 655 с.
12. *Панасюк С. П.* О пространстве подгрупп группы Ли // XIX Всесоюз. алгебр. конф : Тез. докл.— Львов: Ин-т прикл. пробл. математики и механики, 1987.— Ч. 2.— 214 с.
13. *Панасюк С. П.* О нормальности и метризуемости пространства замкнутых подгрупп групп Ли // V Тираспольский симп. по общей топологии и ее прил.— Кишинев : Штиинца, 1985.— 197 с.

Киев. ун-т

Получено 14.02.89.