УДК 517.9

Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский

Билокальная периодическая задача для операторов Штурма — Лиувилля и Дирака и некоторые приложения в теории нелинейных динамических систем. I

Рассмотрены изоспектральные задачи для операторно-значных дифференциальных выражений Штурма — Лиувилля и Дирака. Установлена в рамках градиентного метода полная интегрируемость ассоциированных по Лаксу нелинейных гамильтоновых систем с билокальной импликтической парой нетеровых операторов на многообразии интегральных операторов.

Розглянуті ізоспектральні задачі для операторно-значних диференціальних виразів Штурма — Ліувіля та Дірака. Встановлено в рамках градієнтного методу повну інтегровність асоційованих по Лаксу нелінійних гамільтонових систем з білокальною імплектичною парою нетерових операторів на многостатності інтегральних операторів.

1. Пусть задана обобщенная периодическая спектральная задача для оператора Штурма — Лиувилля на оси $\mathbb{R}^1$

$$Lf = -f_{xx} + uf + \frac{\partial}{\partial y} f = \lambda f, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \| f \|_{\mathscr{B}} < \infty, \tag{1}$$

где $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}; \mathscr{B})$ (пространству гладких функций со значениями в нормированной алгебре операторов $\mathscr{B}$), $\hat{u} \in \mathscr{B}$ — периодическая по $x \in \mathbb{R}$ оператор-функция и $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Те значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых выполняется условие (1), образуют по определению спектр $\sigma(L)$ оператора Штурма — Лиувилля L.

Будем считать, что алгебра операторов $\mathscr{B}$ реализуется интегральными операторами в дополнительном гильбертовом пространстве функций H; например, в случае $H = L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ оператор $\mathscr{B} \ni f(x, y) : H \to H$ действует таким образом:

$$f(x, y)\, \varphi(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} ds f(x, y \mid s)\, \varphi(x, s), \tag{2}$$

где $f(x, y \mid s)$, $y, s \in \mathbb{R}$, — ядро оператора $f(x, y) \in \mathscr{B}$, $\varphi(x, s) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, причем $x \in \mathbb{R}$ в (2) — параметр. Если $\hat{u}(x, y)$ — оператор в (1) с ядром $\hat{u}(x, y \mid z)$, $y, z \in \mathbb{R}$, то произведение $(\hat{u}f)(x, y) \in \mathscr{B}$ определяется сверткой ядер

$$(\hat{u}f)(x, y \mid z) = \int\limits_{\mathbb{R}} ds \hat{u}(x, y \mid s) f(x, s \mid z).$$

2. С целью изучения спектральных свойств задачи (1) в периодическом случае введем операторнозначную фундаментальную матрицу $\mathscr{F}(x, x_0; y)$ эквивалентной (1) матричной дифференциальной системы вида

$$\frac{d\mathscr{F}}{dx} = \mathscr{A}\mathscr{F}, \quad \mathscr{A}[\hat{u}, \lambda] = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ \hat{u} - \lambda & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

где $\mathscr{F}(x_0, x_0; y) = 1$ — единичный оператор в $C^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{B}^2)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная отмеченная точка. Если число $l \in \mathbb{R}_+$ — период операторного коэффициента $\hat{u}(x) \in \mathscr{B}$ в (1), то по решению задачи (3) определяется [1, 2] операторная матрица монодромии $S(x, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathscr{F}(x + l, x; y)$, где $x \in \mathbb{R}$ — параметр. Стандартными методами [1, 2] устанавливается, что матрица монодромии $S(x, y)$ удовлетворяет так называемому уравнению Новикова

$$dS/dx = [\mathscr{A}, S]. \tag{4}$$

Введем теперь операцию следа Tr, действующую по правилу

$$\mathrm{Tr}\, S(x, y)\, \mathrm{reg} \int\limits_{\mathbb{R}} dy\, \mathrm{tr}\, S(x, y \mid y), \tag{5}$$

где $\mathrm{tr}\, S(x, y \mid y)$— матричный след диагонали ядра $S(x, y \mid z)$ для оператора $S(x, y)$, $\mathrm{reg}(\cdot)$ — регуляризованный определенным образом функционал в алгебре $\mathscr{B}$.

Учитывая определение следа (5), из уравнения (4) находим, что функционал $\Delta(\lambda) = \mathrm{Tr}\, S(x, y)$ не зависит от переменной $x \in \mathbb{R}$, т. е. $d\Delta(\lambda)/dx = 0$. (При выводе используется следующее свойство следа: $\mathrm{Tr}\,[A, B] = 0$ для любых матриц-операторов с определенным следом.)

Пусть $\xi(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ — собственное значение матрицы монодромии $S(x, y)$. Тогда, очевидно, число $\lambda \in \sigma(L)$, если $|\xi(\lambda)| = 1$.

При условии аналитичной зависимости матрицы монодромии $S(x, y)$ от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ равномерно по $x, y \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(L)$ будет иметь зонную [1, 2] структуру аналогично скалярному случаю оператора Штурма — Лиувилля (1).

3. Перейдем к анализу функционально-операторных свойств аналитического функционала $\Delta(\lambda)$ на алгебре операторов $\mathscr{B}$. Для этого, следуя градиентному алгоритму [1, 2], вычисляем операторную величину $\varphi = \mathrm{grad}\, \Delta(\lambda)$, удовлетворяющую тождеству

$$\delta\Delta(\lambda) = (\mathrm{grad}\, \Delta(\lambda), \delta\hat{u}) = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} dz\, \mathrm{grad}\, \Delta(\lambda)(\tau, y \mid z)\, \delta\hat{u}(\tau, z \mid y).$$

Из уравнения (5) находим

$$\delta S(x, y) = S(x, y) \int_{x_0}^{x_0+l} d\tau \mathcal{F}(x_0, \tau, y)\, \delta \mathcal{A}(\tau, y)\, \mathcal{F}(\tau, x_0, y). \tag{6}$$

Учитывая, что $\delta\Delta(\lambda) = \operatorname{Tr} \delta S(x, y)$, из (6) получаем

$$\delta\Delta(\lambda) = \operatorname{Tr} \int_{x_0}^{x_0+l} d\tau S(\tau, y)\, \delta\mathcal{A}(\tau, y),$$

отсюда в силу (3)

$$\operatorname{grad} \Delta(\lambda)(\tau, y \mid z = s_{12}(\tau, y \mid z). \tag{7}$$

Чтобы получить аналогично результатам [1, 2] дифференциальное соотношение для ядра оператора $\varphi(\tau, y)$, воспользуемся явным видом уравнения Новикова (4)

$$\begin{gathered} s_{11,x} = s_{21} - s_{12}(\hat{u} - \lambda) - s_{12}\frac{\partial}{\partial y}, \\ s_{22,x} = (\hat{u} - \lambda) s_{12} - s_{21} + s_{12,y}, \\ s_{12,x} = s_{22} - s_{11}, \\ s_{21,x} = (\hat{u} - \lambda) s_{11} - s_{22}(\hat{u} - \lambda) + s_{11,y} - s_{22}\frac{\partial}{\partial y}. \end{gathered} \tag{8}$$

Полагая в (8) $\hat{u}(x; y \mid z) = \delta(y - z)\, u(x; y)$, записываем уравнение для ядра $s_{12}(x; y \mid z)$

$$\mathcal{M} s_{12}(x; y \mid z) = 4\lambda \mathcal{L} s_{12}(x; y \mid z), \tag{9}$$

где $\mathcal{M}, \mathcal{L} : T^*(M) \to T(M)$ — интегро-дифференциальные операторы вида [3—5]

$$\mathcal{M} = \partial^3 - (u^+\partial + \partial u^+) + u^-\partial^{-1}u^-, \quad \mathcal{L} = \partial/\partial x,$$
$$u^\pm = u(y) \pm u(z) + \partial/\partial y \mp \partial/\partial z.$$

Тождество (9), которое перепишем согласно (7) в виде

$$\Lambda\varphi = 4\lambda\varphi. \tag{10}$$

задает эквивалентную задачу для рекурсионного оператора $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$. При этом $\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\}$ — согласованная [2] билокальная гамильтонова пара имплектических операторов на многообразии $M \ni \hat{u}$.

Пусть оператор Штурма — Лиувилля (1) подвергается параметрически по $t \in \mathbb{R}$ изоспектральной [1, 2] деформации типа Лакса, т. е. $d\sigma(L)/dt = 0$. Тогда нетрудно установить из (10), что однородная динамическая система Кадомцева — Петвиашвили [1] $\hat{u}_t = \Lambda^{*2} \cdot 1 \Rightarrow u_{xxx} - 6uu_x + \partial^{-1} u_{yy} = u_t$ удовлетворяет условию изоспектральности типа Лакса для (1). Очевидно, этому условию удовлетворяет общая динамическая система

$$\hat{u}_t = -\mathcal{L} \operatorname{grad} \Delta(\lambda), \tag{11}$$

где, как установлено выше, функционал $\Delta(\lambda)$ — инвариант по переменным $x, t \in \mathbb{R}$ и выполняет в (11) роль производящей функции Гамильтона.

При помощи рекурсионного оператора $\Lambda^* = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}$ строится вся бесконечная иерархия вполне интегрируемых гамильтоновых потоков $\alpha_j = \Lambda^{*j} \cdot K$, $j \in \mathbb{Z}$, причем согласно *(10)* $[\alpha_j, \alpha_k] = 0$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $\{\Delta(\lambda), \Delta(\mu)\}_{\mathcal{L}} = \{\Delta(\lambda), \Delta(\mu)\}_{\mathcal{M}} = 0$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Всем потокам α_j, $j \in \mathbb{Z}$, соответствует по теореме Нетер бесконечная инволютивная [2] иерархия законов сохранения $\{\gamma_j \in \mathcal{D}(M) : j \in \mathbb{Z}\}$, причем $\alpha_j = \mathcal{L} \operatorname{grad} \gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Стандартными методами [2, 6, 7] устанавливается, что динамическая система (11) обладает подгруппой инвариантности $G = \mathscr{C} \otimes \mathrm{Diff}(\mathbf{S}^1)$, изоморфной квантовой группе токов на окружности $\mathbf{S}^1$.

4. Рассмотрим следующую динамическую систему, ассоциированную с (11),

$$\hat{u}_t = \mathcal{M}\hat{\varphi} - 4\lambda\mathcal{L}\hat{\varphi}, \tag{12}$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\lambda) \in T^*(M)$. Представляя $\tilde{\varphi}(\lambda)$ в виде

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \lambda^N + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \lambda^{N-j}, \quad N \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, \tag{13}$$

и подставляя в (12), находим

$$\hat{u}_t = \mathcal{M}\varphi_N, \quad \mathcal{M}\varphi_j = 4\mathcal{L}\varphi_{j+1}, \tag{14}$$

т. е. $\varphi_j = \mathrm{grad}\,\gamma_j \in T^*(M)$, $j = \overline{1, N}$. Формулы (14) рекуррентно определяют «высшие» уравнения Кадомцева — Петвиашвили, совпадающие, очевидно, с гамильтоновыми потоками $\alpha_j = \mathrm{grad}\,\gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, определенными выше. Существование представления (13) можно [1, 2] интерпретировать как наличие полиномиального решения для градиентного соотношения (10), т. е. $\tilde{\varphi}(x, y \mid z) = \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j(x, y \mid z))$, где $\mu_j \in \mathbb{C}^1$, $j = \overline{1, N}$,—точки «дополнительного» (т. е. «подвижного») спектра оператора (1). Чтобы получить динамические уравнения для нулей μ_j, $j = \overline{1, N}$, воспользуемся тем свойством, что $s_{12}(\mu) = \tilde{\varphi}(\mu)\,\mathrm{const}(\mu)$, $\mu \in \mathbb{C}$, и вычислим эволюцию

$$\frac{d}{d\tau} s_{12}(\mu) = \{\Delta(\lambda), s_{12}(\mu)\}_{\mathscr{L}} \tag{15}$$

по эволюционному параметру $\tau \in \mathbb{R}^1$.

Применяя к вычислению (15) подход из [2], можно получить соответствующие дифференциальные уравнения для «условных» собственных значений $\mu_j(x, y \mid z)$, $j = \overline{1, N}$, решения которых [1, 2] при помощи «тождеств следов» определяют в явном виде потенциал $\hat{u} \in M$ в операторе Штурма — Лиувилля (1). При этом аналогично [1, 2] при помощи алгебро-геометрических методов определяется редуцированное конечномерное интегральное многообразие $M_N \subset_{\rightarrow} M$, соответствующее классу «конечнозонных» данных Коши для производящей динамической системы (11).

5. В силу изложенного выше динамическая система (11), в частности, нелинейное уравнение Кадомцева — Петвиашвили, обладает бесконечной иерархией инволютивных законов сохранения $\{\gamma_j \in \mathscr{D}(M) : j \in \mathbb{Z}\}$. Определим их по явному виду этого уравнения

$$\hat{u}_t = \hat{u}_{xxx} - 3\hat{u}\hat{u}_x - 3\hat{u}_x\hat{u} + \partial^{-1}\hat{u}_{yy} = K[\hat{u}]. \tag{16}$$

На основе градиентного алгоритма [2] предположим, что градиентное уравнение Лакса

$$\varphi_t = -K'^*\varphi \tag{17}$$

допускает решение в виде

$$\varphi(x, y \mid z, \lambda) = \delta(y - z)\exp[\lambda x + (\lambda^3 + \beta/\lambda)t + \beta y + \partial^{-1}\sigma(x, y, \lambda)], \tag{18}$$

где при $|\lambda| \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\sigma(x, y, \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[u]\lambda^{-j}. \tag{19}$$

Подставляя (10) и (19) в (17), находим при всех $j\in\mathbb{Z}_+$ рекуррентные соотношения

$$\partial^{-1}\sigma_{j,t}=\sigma_{j,xx}+3\sigma_{j+1,x}+3\sum_{k=0}^{j}\sigma_{j-k}\sigma_{k,x}+3\sigma_{j+2}+3\sum_{k=0}^{j+1}\sigma_{j-k+1}\sigma_k+$$

$$+\sum_{k,s=0}^{j}\sigma_{j-k}\sigma_{k-s}\sigma_s-6u\delta_{j,-1}-6u\sigma_j+a_j-\beta^2\delta_{j,-1};\qquad a_j+a_{j+1}=\beta^2+$$

$$+2\beta\partial^{-1}\sigma_{j,y}+\sum_{k=0}^{j}(\partial^{-1}\sigma_{j-k,y})(\partial^{-1}\sigma_{k,y})+\partial^{-1}\sigma_{j,yy},$$

разрешая которые, определяем $\sigma_0=0$, $\sigma_1=2u$, $\sigma_2=-2u_x$, $\sigma_3=2u_{xx}+$ $+2u^2$ и т. д. Очевидно, в силу (18) величины $\gamma_j=\int\limits_0^l dx\int\limits_{\mathbb{R}}dy\sigma_j[u]$, $j\in\mathbb{Z}_+$, — законы сохранения динамической системы (16). Используя согласованную $\{\mathcal{L},\mathcal{M}\}$-пару билокальных гамильтоновых операторов, можно на основе градиентного метода [2] решить обратную задачу для динамической системы (16) — определить для нее изоспектральную дифференциальную операцию типа Лакса, совпадающую, очевидно, с априори рассмотренным выше выражением Штурма — Лиувилля (1).

6. Приведенный выше функционально-операторный метод исследования операторно-значного дифференциального выражения Штурма — Лиувилля (1) обобщается на другие типы операторных выражений. Например, для случая дифференциального выражения Дирака [1, 3—5]

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}=\mathcal{A}\mathcal{F},\quad \mathcal{A}=\left\|\begin{matrix}\lambda-\partial/\partial y & \psi^*\\ \psi & \partial/\partial y-\lambda\end{matrix}\right\|,\tag{20}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$, $(\psi,\psi^*)^\tau\in C_l^{(\infty)}(\mathbb{R},\varphi(\mathbb{R},\mathbb{C}^2))$, условию изоспектральности типа Лакса удовлетворяет нелинейная динамическая система Дэви — Стюартсона [1, 3 — 5] и ее высшие аналоги с редукциями $\hat\psi=\pm\hat\psi$. Все эти динамические системы обладают согласованной билокальной гамильтоновой $\{\mathcal{L},\mathcal{M}\}$-парой имплектических операторов. Для ее явного определения представим (20) в общем операторном виде $d\mathcal{F}/dx=\mathcal{A}\mathcal{F}$, где

$$\mathcal{A}=\left\|\begin{matrix}\lambda-\hat\partial_y & \hat\psi^*\\ \hat\psi & \hat\partial_y-\lambda\end{matrix}\right\|,$$

$\hat\partial_y(x,y\,|\,z)=\delta'(y-z)$, $\hat\psi(x,y\,|\,z)=\delta(y-z)\psi(x,y)$, $\hat\psi^*(x,y\,|\,z)=\delta(y-z)\times$ $\times\psi^*(x,y)$. Для величины $\varphi(\lambda)=\operatorname{grad}\Delta(\lambda)$ находим следующее выражение:

$$\operatorname{grad}\Delta(\lambda)(y\,|\,z)=(s_{12}(y\,|\,z),\ s_{21}(y\,|\,z))^\tau.$$

Используя далее уравнение Новикова — Лакса $S_x=[\mathcal{A},S]$ для матрицы монодромии $S(x,y\,|\,z)$ дифференциального выражения (20) — в покомпонентной форме

$$s_{11,x}=\psi^*(y)s_{21}-\psi(z)s_{12}-s_{11,(y+z)},$$

$$s_{22,x}=\psi(y)s_{12}-\psi^*(z)s_{21}+s_{22,(y+z)},$$

$$s_{12,x}=2\lambda s_{12}+\psi^*(y)s_{22}-\psi^*(z)s_{11}-s_{12,(y-z)},$$

$$s_{21,x}=-2\lambda s_{21}+\psi(y)s_{11}-\psi(z)s_{22}+s_{21,(y-z)},$$

после несложных вычислений находим $\mathcal{M}\operatorname{grad}\Delta\ \lambda)=2\lambda\mathcal{L}\operatorname{grad}\Delta(\lambda)$, где

$$\mathcal{L}=\left\|\begin{matrix}0&-1\\1&0\end{matrix}\right\|,\quad \mathcal{M}=\left\|\begin{matrix}\mathcal{M}_{11}&\mathcal{M}_{12}\\ \mathcal{M}_{21}&\mathcal{M}_{22}\end{matrix}\right\|,\tag{21}$$

$$\mathcal{M}_{11} = \frac{\psi^+}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1}(\partial\psi^+ - \partial_{y+z}\psi^-) - \frac{\psi^-}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1} \times$$

$$\times (\partial\psi^- - \partial_{y+z}\psi^+),$$

$$\mathcal{M}_{22} = \frac{\psi^{*+}}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1}(\partial\psi^{*+} - \partial_{y+z}\psi^{*-}) - \frac{\psi^{*-}}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1} \times$$

$$\times (\partial\psi^{*-1} - \partial_{y+z}\psi^{*+}),$$

$$\mathcal{M}_{12} = \partial_{x-y+z} - \frac{\psi^+}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1}(\partial\psi^{*+} - \partial_{y+z}\psi^{*-}) - \frac{\psi^-}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1} \times$$

$$\times (\partial\varphi^{*-} - \partial_{y+z}\psi^{*+}),$$

$$\mathcal{M}_{21} = \partial_{x+y-z} - \frac{\psi^{*+}}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1}(\partial\psi^+ + \partial_{y+z}\psi^-) - \frac{\psi^{*-}}{2}(\partial^2 - \partial^2_{y+z})^{-1} \times$$

$$\times (\partial\psi^- + \partial_{y+z}\psi^+),$$

а также, $\psi^\pm = \psi(y) \pm \psi(z)$, $\psi^{*\pm} = \psi^*(y) \pm \psi^*(z)$, $\partial = \partial/\partial x$. В силу алгоритма вывода [2] операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в (21) имплектичны на $M = C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2))$ и образуют согласованную билокальную гамильтонову пару.

Соответствующие изоспектральные динамические системы на M имеют [2] вид $\hat{u}_t = \Lambda^{*j}\mathcal{L}\hat{u}^{*-}$, $j \in \mathbb{Z}$, где $\hat{u} = (\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^*) \in M$, $\Lambda^* = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}$. При $j = 2$ нетрудно получить динамическую систему Дэви — Стюартсона

$$\psi_t = \frac{i}{2}(\psi_{xx} + \psi_{yy}) - i\psi\{2(\partial_x^2 - \partial_y^2)^{-1}|\psi|^2_{xx} - |\psi|^2\},$$

$$\psi_t^* = -\frac{i}{2}(\psi^*_{xx} + \psi^*_{yy}) + i\psi^*\{2(\partial_x^2 - \partial_y^2)^{-1}|\psi|^2_{xx} - |\psi|^2\}.$$

Для редукции $\psi^* = \psi = u \in M = C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ при $j = 3$ находим интегрируемую динамическую систему

$$u_t = u_{xxx} + u_{yyy} - \frac{1}{3}u_y\partial_x^{-1}(u^2)_y + \frac{1}{3}u_x\partial_y^{-1}(u^2)_x +$$

$$+ \frac{u}{3}[\partial_x^{-1}(uu_y)_y + \partial_y^{-1}(uu_x)_x],$$

обобщающую на двумерный случай нелинейное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза [7].

Замечание 1. Спектральная задача (1) обобщается следующим образом:

$$lf = -\Big(\sum_{j=0}^N \alpha_j\lambda^j\Big)f_{xx} + \Big(\sum_{j=0}^N \hat{u}_j(x, y)\lambda^j + \sum_{j=0}^N v_j(x, y)\partial_y^j - \lambda^{N+1}\Big)f = 0, \quad (22)$$

где $\alpha_j \in \mathbb{C}^1$, $j = \overline{0, N}$, — набор постоянных чисел. Частным случаем изоспектральной динамической системы, соответствующей операции (22), будет нелинейное уравнение Новикова — Веселова [8]. Соответствующее обобщение спектральной задачи Дирака (20) имеет вид

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{F}, \quad \mathcal{A} = \begin{Vmatrix} \lambda^2 - \partial_y - \psi^*\psi & \lambda\psi^* \\ \lambda\psi & \psi^*\psi + \partial_y - \lambda^2 \end{Vmatrix} \quad (23)$$

и приводит к двумеризованной форме нелинейной динамической системы типа Шредингера — Боголюбова (мл.) [2, 6, 7, 10], имеющей важные приложения в квантовой теории поля и статистической физике.

З а м е ч а н и е 2. Спектральная задача (1) преобразуется к новой форме с приоритетом переменной $y \in \mathbb{R}$

$$df/dy = f_{xx} - \hat{u}f + \lambda f,$$

приводящей к новой форме билокального гамильтонового формализма [3—5] для динамической системы Кадомцева — Петвиашвили. Соответствующая трансформация спектральных задач (20) и (23) к существенно новым результатам не приводит.

З а м е ч а н и е 3. Возникшая в пп. 1—5 проблема описания спектра периодической задачи самосопряженного операторного выражения Штурма — Лиувилля (1) и поиска его алгебро-геометрической интерпретации, следуя теории Новикова [1], является актуальной и важной для дальнейших исследований многомеризованных вполне интегрируемых нелинейных динамических систем. В этом отношении могут быть полезными спектральные соотношения, установленные в [9] для общих операторнозначных спектральных задач типа Штурма — Лиувилля.

1. *Теория* солитонов / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 385 с.
2. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
3. *Fokas A. S., Santini P. M.* Bi-Hamiltonian formulation of the Kadomtsev — Petviashvili and Benjamin — Ono equations // J. Math. Phys.— 1988.— **29**, N 3.— P. 604—617.
4. *Fokas A. S., Santini P. M.* Recursion operators and Bi-Hamiltonian structures in Multidimensions. I // Communs Math. Phys.— 1988.— **115**, N 2.— P. 375—419.
5. *Fokas A. S., Santini P. M.* The recursion operator of the Kadomtsev — Petviashvili equation and the Squared Eigenfunctions of the Schrödinger operator // Stud. Appl. Math.— 1986.— **75**, N 2.— P. 179—186.
6. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Квантовая алгебра Ли токов — универсальная алгебраическая структура симметрий вполне интегрируемых динамических систем. II // Теорет . мат. физика.— 1988.— **75**, № 1.— С. 3—17.
7. *Самойленко В. Г., Филь Б. Н.* Алгебры симметрий вполне интегрируемых динамических систем // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 2.— С. 192—198.
8. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Интегрируемость двумерного КДФ // Докл. АН СССР.— 1984.— **197**, № 5.— С. 705—708.
9. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* Спектральная теория операторных граничных задач.— Киев : Наук. думка, 1985.— 268 с.
10. *Boiti M., Leon J. J.-P., Pempinelli F.* Canonical and Noncanonical Recursion operators in Multidimensions // Stud. Appl. Math.— 1988.— **78**, N 1.— P. 1—19.

Ин-т прикл. проблем механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 20,07,88