УДК 515.12

Т. Н. Радул

Монада гиперпространств включения и ее алгебры

Строится монада в смысле С. Эйленберга и Дж. Мура на категории компактов, определяемая функтором гиперпространств включения. Приводится описание категории алгебр этой монады, а также характеризация свободных алгебр.

Будується монада в розумінні С. Ейленберга і Дж. Мура на категорії компактів, яка визначається функтором гіперпросторів включення. Дається характеризація категорії алгебр цієї монади, а також характеризація вільних алгебр.

Понятие монады (или тройки) на категории $\mathcal{C}$ введено С. Эйленбергом и Дж. Муром [1] в связи с теорией сопряженных функторов. Монадой называется тройка $\mathbf{T} = (F, \eta, \mu)$, где $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ — эндофунктор и $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to F$ (единица), $\mu : F^2 \to F$ (умножение) — естественные преобразования, для которых $\mu \circ \eta F = \mu \circ F\eta = 1_F$ и $\mu \circ \mu F = \mu \circ F\mu$.

В последнее время интенсивно исследуются монады в различных подкатегориях категории топологических пространств. В категориях компактов Comp к монадам приводят, в частности, функторы гиперпространства [2], вероятностных мер [3], суперрасширения [4].

В настоящей статье рассматривается монада на категории Comp, порожденная введенным Е. В. Моисеевым [5] функтором гиперпространств включения. Приводится описание категории алгебр (см. ниже) этой монады в терминах теории компактных решеток, а также посредством компактов, наделенных предбазами специального вида.

1. Монада гиперпространств включения. Ниже все пространства и отображения берутся из категории Comp. Функтор гиперпространства (экспоненты) сопоставляет каждому пространству X пространство $\exp X$ непустых замкнутых подмножеств пространства X, наделенное топологией Вьеториса. Базу этой топологии образуют множества вида $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$ и $A \cap V_i \neq \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant n\}$, где множества $V_1, \ldots, V_n$ открыты в X. Для отображения $f : X \to Y$ отображение $\exp f : \exp X \to \exp Y$ определяется формулой $\exp f(A) = fA \in \exp Y$, $A \in \exp X$.

Семейство $\mathcal{A} \in \exp^2 X$ называется гиперпространством включения [6], если оно удовлетворяет условию: для любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \exp X$, если $B \supset A$, то $B \in \mathcal{A}$. Е. В. Моисеев [5] предложил рассматривать множество GX всех гиперпространств включения, наделенное индуцированной из

$\exp^2 X$ топологией (обозначенное $M(2^x \setminus \{\varnothing\})$, множество GX рассмотрено в [7]). Для отображения $f: X \to Y$ отображение $Gf: GX \to GY$ определяется следующим образом: $Gf(\mathcal{A}) = \{B \in \exp Y \mid B \supset f(A)$ для некоторого $A \in \mathcal{A}\}$.

Определим отображение $rX: \exp^2 X \to GX$, положив $rX(\mathcal{A}) = \{B \in \in \exp X \mid B \supset A$ для некоторого $A \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{A} \in \exp^2 X$. Как нетрудно убедиться, rX — непрерывное отображение и $r = \{rX\}: \exp^2 \to G$ — естественное преобразование. Кроме того, $Gf = rY \circ \exp^2 f$.

Из общей теории [8] следует существование единственного естественного преобразования $\eta: 1_{\mathrm{Comp}} \to G$. Компоненты этого преобразования определяются формулой $\eta X(x) = \{A \in \exp X \mid x \in A\}$, $x \in X$.

Пусть $\alpha \in \exp GX$. Тогда $\bigcap \alpha \in GX$ и, поскольку объединение компактного семейства компактов является компактом [8], $\bigcup \alpha \in GX$. Отображения $\bigcup$, $\bigcap$: $\exp GX \to GX$ является непрерывными [7].

Определим отображение $\mu X: G^2 X \to GX$ формулой $\mu X(\mathfrak{A}) = \bigcup\{\bigcap \alpha \mid \alpha \in \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} \in G^2 X$.

Предложение 1. *Отображения μX являются компонентами естественного преобразования $\mu: G^2 \to G$.*

Доказательство. Отметим, что из непрерывности отображений $\bigcup$, $\bigcap$ вытекает непрерывность μX.

Пусть $f: X \to Y$ — отображение и $\mathfrak{A} \in G^2 X$. Положим

$$\mathcal{B}_1 = \mu Y \circ G^2 f(\mathfrak{A}) = \mu Y \circ rGX \circ \exp^2 Gf(\mathfrak{A}) = \mu Y \circ rGY\{\{Gf(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \in \alpha\} \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} = \mu Y\{\beta \in \exp GY \mid \beta \supset \{Gf(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \alpha\},\ \alpha \in \mathfrak{A}\} = \bigcup\{\bigcap \beta \mid \beta \supset \supset Gf(\alpha),\ \alpha \in \mathfrak{A}\} \text{ и } \mathcal{B}_2 = Gf \circ \mu X(\mathfrak{A}) = rGY \circ \exp^2 f(\bigcup\{\bigcap \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}) = = \{B \in \exp Y \mid B \supset f(A),\quad A \in \bigcup\{\bigcap \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}\}.$$

Пусть $B \in \mathcal{B}_1$, тогда существует $\beta \supset Gf(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}$ такое, что $B \in \bigcap \beta$. Следовательно, для всех $\mathcal{A} \in \alpha$ имеем $B \in Gf(\mathcal{A})$. Это означает, что для всякого $\mathcal{A} \in \alpha$ существует $A \in \mathcal{A}$, для которого $B \supset fA$, т. е. $B \in \mathcal{B}_2$. Итак, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим $B \in \mathcal{B}_2$. Тогда существует $\alpha \in \mathfrak{A}$ такое, что для каждого $\mathcal{A} \in \alpha$ существует $A \in \mathcal{A}$, для которого $B \supset f(A)$. Следовательно, $B \in Gf(\mathcal{A})$ для каждого $\mathcal{A} \in \alpha$ и, полагая $\beta = Gf(\alpha)$, получаем $B = \bigcap \beta$ и $B \in \mathcal{B}_1$ т. е. $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Предложение доказано.

Теорема 1. *Тройка $\mathbf{G} = (G, \eta, \mu)$ является монадой на категории* Comp.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \in GX$, тогда

$$\mu X \circ \eta GX(\mathcal{A}) = \mu X(\{\beta \in \exp GX \mid \mathcal{A} \in \beta\}) = \bigcup\{\bigcap \beta \mid \beta \in \exp GX,\ \mathcal{A} \in \beta\} = = \mathcal{A},\ \mu X \circ G\eta X(\mathcal{A}) = \mu X \circ rX \circ \exp^2 \eta X(\mathcal{A}) = \mu X \circ rX(\{\{\eta X(a) \mid a \in \in A\} \mid A \in \mathcal{A}\}) = \mu X(\{\beta \in \exp GX \mid \beta \supset \{\eta X(a) \mid a \in A\},\ A \in \mathcal{A}\}) = = \bigcup\{\bigcap \beta \mid \beta \in \exp GX,\ \beta \supset \{\eta X(a) \mid a \in A\},\quad A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A},$$

т. е. $\mu \circ \eta G = \mu G \eta = 1_G$.

Докажем, что $\mu \circ \mu G = \mu \circ G\mu$. Пусть $\tilde{\mathfrak{A}} \in G^3 X$ и $\mathcal{A}_1 = \mu X \circ G\mu X(\tilde{\mathfrak{A}})$, $\mathcal{A}_2 = \mu X \circ \mu GX(\tilde{\mathfrak{A}})$. Непосредственно убеждаемся, что $\mathcal{A}_1 = \bigcup\{\bigcap \beta \mid \beta \in \in \exp GX,\ \beta \supset \{\bigcup\{\bigcap \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} \mid \mathfrak{A} \in \tilde{\alpha}\},\ \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{A}}\}$ и $\mathcal{A}_2 = \bigcup\{\bigcap \alpha \mid \alpha \in \bigcup\{\bigcap \tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in \in \tilde{\mathfrak{A}}\}\}$.

Пусть $A \in \mathcal{A}_2$, тогда существует $\tilde{\alpha} \in \exp G^2 X$ такое, что для любого $\mathfrak{A} \in \tilde{\alpha}$ найдется $\alpha \in \mathfrak{A}$ такое, что $A \in \alpha$ для любого $\mathcal{A} \in \alpha$. Отсюда $A \in \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$.

Доказательство обратного включения проводится непосредственно. Теорема доказана.

2. Описание категории $\mathbf{G}$-алгебр. $\mathbf{G}$-алгеброй монады $\mathbf{T} = (F, \eta, \mu)$ на категории $\mathscr{C}$ называется пара (X, ξ), где ξ — морфизм из

FX в X, для которого $\xi \circ \eta X = 1_X$ и $\xi \circ \mu X = \xi \circ F\xi$. Морфизмом **T**-алгебры (X, ξ) в **T**-алгебру (X', ξ') называется такой морфизм $f: X \to X'$, что $\xi' \circ \circ Ff = f \circ \xi$. Категория **T**-алгебр и их морфизмов обозначается $\mathcal{G}^{\mathbf{T}}$.

Для описания категории $\mathrm{Comp}^{\mathbf{G}}$ понадобится ряд определений. В дальнейшем все рассматриваемые предбазы предполагаются замкнутыми. Система множеств $\mathcal{G}$ называется бинарной [9], если любая ее сцепленная подсистема имеет непустое пересечение (система множеств называется сцепленной, если любые ее два элемента пересекаются по непустому множеству).

Определение 1. *Предбаза $\mathcal{G}$ в пространстве X называется бисуперкомпактной, если она допускает разложение $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$, для которого*

а) система $\mathcal{G}$ бинарна, а подсистемы $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}^-$ являются сцепленными;

б) для каждых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, существуют $S_1 \in \mathcal{G}^+$ и $S_2 \in \mathcal{G}^-$ такие, что $S_1 \cup S_2 = X$ и множества $X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$ резделяют точки x_1 и x_2;

в) для любого $S \in \mathcal{G}^+$ $(S \in \mathcal{G}^-)$ и любой окрестности $OS \supset S$ существует $S' \in \mathcal{G}^+$ $(S' \in \mathcal{G}^-)$ такое, что $S \subset \operatorname{int} S' \subset S' \subset OS$.

Для любого $A \subset X$ полагаем $A^+ = \{\mathcal{A} \in GX \mid A \in \mathcal{A}\}$ и $A^- = \{\mathcal{A} \in GX \mid B \cap A \neq \varnothing$ для любого $B \in \mathcal{A}\}$. Нетрудно убедиться, что система множеств $\mathcal{L}(X) = \{A^+ \mid A \in \exp X\} \cup \{A^- \mid A \in \exp X\}$ образует предбазу пространства GX. В дальнейшем предбазу $\mathcal{L}(X)$ будем называть канонической.

Лемма 1. *Предбаза $\mathcal{L}(X)$ является бисуперкомпактной.*

Лемма доказывается аналогично лемме 4 из [4].

Лемма 2. *Пусть $(X, \mathcal{G})$ — пространство с заданной на нем бисуперкомпактной предбазой. Тогда для каждого $\mathcal{A} \in GX$ множество $K_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}) = \bigcap \{S \in \mathcal{G}^+ \mid$ существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $S \supset A\} \cap (\bigcap \{S \in \mathcal{G}^- \mid S \cap B \neq \varnothing$ для каждого $B \in \mathcal{A}\})$ одноточечно.*

Доказательство. Из бинарности предбазы $\mathcal{G}$ и сцепленности систем $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}^-$ вытекает, что $K_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}) \neq \varnothing$. Допустим, что существует $a_1, a_2 \in K_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$ такие, что $a_1 \neq a_2$. Выберем множества $S_1 \in \mathcal{G}^+$ и $S_2 \in \mathcal{G}^-$ так, чтобы дополнения к ним разделяли точки a_1 и a_2. Тогда, если существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $A \cap S_2 = \varnothing$, то $A \subset S_1$, а значит, одна из точек a_1, a_2 не может лежать в $K_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$. Лемма доказана.

Используя лемму 2, определяем отображение $k_{\mathcal{G}}: GX \to X$ условием $k_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}) \in K_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$.

Аналогично лемме 3 из [4] доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Отображение $k_{\mathcal{G}}$ непрерывно.*

Лемма 4. *Если (X, ξ) — **G**-алгебра, то для любых $A \in \exp X$ имеем $\xi(\xi(A^+)^+) = \xi(A^+)$ и $\xi(\xi(A^-)^-) = \xi(A^-)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $A^{++} \subset G^2X$. Имеем $\xi \circ G\xi(A^{++}) = \xi(\xi(A^+)^+)$. С другой стороны, $\xi \circ G\xi(A^{++}) = \xi \circ \mu X(A^{++})$ и остается только показать, что $\mu X(A^{++}) = A^+$.

Если $\mathfrak{A} \in A^{++}$, то $A^+ \in \mathfrak{A}$ и поэтому $A \in \mu X(\mathfrak{A})$, т. е. $\mu X(\mathfrak{A}) \in A^+$. Обратно, если $\mathcal{A} \in A^+$, то $\eta GX(\mathcal{A}) \in A^{++}$ и $\mathcal{A} = \mu X \circ \eta GX(\mathcal{A}) \in \mu X(A^{++})$.

Для A^- доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если (X, ξ) — **G**-алгебра и $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in GX$, то справедливы равенства*

1) $\xi(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \xi(\eta X \circ \xi(\mathcal{A}) \cap \eta X \circ \xi(\mathcal{B}))$;
2) $\xi(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \xi(\eta X \circ \xi(\mathcal{A}) \cup \eta X \circ \xi(B))$;

Доказательство. Докажем только 1. Положим $\mathfrak{A} = \{\alpha \in \exp GX \mid \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \subset \alpha\}$. Очевидно, $\mu X(\mathfrak{A}) = \mathcal{A} \cap B$, а $G\xi(\mathfrak{A}) = \eta X \circ \xi(\mathcal{A}) \cap \eta X \circ \xi(\mathcal{B})$. Равенство 1 вытекает теперь из равенства $\xi \circ \mu X = \xi \circ G\xi$.

Назовем компактную хаусдорфову полурешетку полурешеткой Лоусона, если она допускает достаточное семейство непрерывных гомоморфизмов в $[0, 1]$ с операцией $\max\{x, y\}$. Как доказано в [10], полурешетки Лоусона характеризуются тем, что базу топологии каждого элемента в них составляют открытые подполурешетки. В [11] доказано, что существование такой базы эквивалентно непрерывности полурешеточной операции, как отображения с $\exp X$ в X.

Аналогично можно определить решетку Лоусона как компактную хаусдорфову решетку, допускающую достаточное семейство непрерывных гомоморфизмов в решетку $[0, 1]$ с операциями $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$. В [7] показано, что компактная дистрибутивная решетка лоусонова тогда и только тогда, когда она является лоусоновой полурешеткой по каждой своей операции. Заметим, что решетка Лоусона представима как замкнутая подрешетка куба $[0, 1]^\alpha$, а значит, она вполне дистрибутивна [12]. В дальнейшем будем пользоваться определением решетки Лоусона как компактной дистрибутивной решетки, в которой обе операции непрерывны как отображения с $\exp X$ в X.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Пара* (X, ξ) *является* $\mathbf{G}$-*алгеброй*;

2. X — *решетка Лоусона, для которой* $\xi(\mathcal{A}) = \sup\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{A} \in GX$;

3. *В* X *существует бисуперкомпактная предбаза* $\mathcal{G}$, *для которой* $\xi = k_{\mathcal{G}}$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Определим бинарные операции $\wedge$ и $\vee$ на X, полагая $x \wedge y = \xi(\eta X(x) \cap \eta X(y))$, $x \vee y = \xi(\eta X(x) \cup \cup \eta X(y))$. Легко видеть, что эти операции превращают X в дистрибутивную компактную решетку. Кроме того, для любого $A \in \exp X$ имеем $\inf(A) = \xi(\{B \in \exp X \mid B \supset A\})$, $\sup(A) = \xi(\{B \in \exp X \mid B \cap A \neq \varnothing\})$, откуда следует, что отображения $\sup, \inf : \exp X \to X$ непрерывны, т. е. X — решетка Лоусона. Равенство $\xi(\mathcal{A}) = \sup\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$ проверяется непосредственно.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $(X, \mathcal{G})$ — пространство с бисуперкомпактной предбазой $\mathcal{G}$. Полагаем $\xi = k_{\mathcal{G}}$. Равенство $\xi \circ \eta X = 1_X$ очевидно.

Покажем, что $\xi \circ \mu X = \xi \circ G\xi$. Пусть $\mathfrak{A} \in G^2X$. Положим $a = \xi \circ \mu X(\mathfrak{A})$, $b = \xi \circ G(\xi)(\mathfrak{A})$. Пусть $S \in \mathcal{G}^+$ и $S \supset A$, где $A \in \bigcap \alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда $\xi(\alpha) \subset S$, а значит, $b \in S$. Если $S \in \mathcal{G}^-$ и $S \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \bigcap \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует $\mathcal{A} \in \alpha$ такое, что $\xi(\mathcal{A}) \in S$ т. е. $S \cap \xi(\alpha) \neq \varnothing$ и $b \in S$.

Отсюда следует, что $b = a$, и значит, (X, ξ) — $\mathbf{G}$-алгебра.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть на пространстве X задана структура решетки Лоусона, и $\xi(\mathcal{A}) = \sup\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$ для любого $\mathcal{A} \in GX$. Очевидно $\xi \circ \eta X = 1_X$. Покажем, что $\xi \circ \mu X = \xi \circ G\xi$. Пусть $\mathfrak{A} \in G^2X$, тогда $\xi \circ G\xi(\mathfrak{A}) = \xi \circ rX \circ \circ \exp^2 \xi(\mathfrak{A}) = \xi \circ rX(\{\{\xi(\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \alpha\} \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} = \xi(\{B \in \exp X \mid B \supset \{\sup\{\inf A \mid A \in \in \mathcal{A}\} \mid \mathcal{A} \in \alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A}\} = \sup\{\inf\{\sup\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\} \mid \mathcal{A} \in \alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ через F_α обозначим множество таких (необязательно непрерывных) отображений $\varphi : \alpha \to \bigcup \alpha$, что $\varphi(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\xi \circ \mu X(\mathfrak{A}) = \xi(\{A \mid A \in \bigcap \alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}) = \sup\{\inf A \mid A \in \bigcap \alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} =$$

$$= \sup\{\sup\{\inf A \mid A \in \bigcap \alpha\} \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} = \sup\{\sup\{\inf(\bigcup\{\varphi(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \alpha\}) \mid \varphi \in$$

$$\in F_\alpha\} \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} = \{\sup\{\inf\{\sup\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\} \mid \mathcal{A} \in \alpha\} \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} = \xi \circ G\xi(\mathfrak{A})$$

(предпоследнее равенство вытекает из вполне дистрибутивности решетки X).

$1 \Rightarrow 3$. Для $\mathbf{G}$-алгебры (X, ξ) положим $\mathcal{G}^- = \{\xi(A^-) \mid A \in \exp X\}$, $\mathcal{G}^+ = \{\xi(A^+) \mid A \in \exp X\}$. Очевидно, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^- \cup \mathcal{G}^+$ — предбаза пространства X. Из лемм 1 и 4 вытекает бинарность предбазы $\mathcal{G}$ и сцепленность систем $\mathcal{G}^-$ и $\mathcal{G}^+$. Доказательство свойства в) из определения 1 проводится аналогично доказательству свойства почти нормальности в теореме 2 [4] с использованием леммы 4.

Покажем, что для $\mathcal{G}$ выполняется свойство б). Для этого покажем, что множество $K = \bigcap(\{\xi(M^+) \mid M \in \mathcal{A}\} \cup \{\xi(M^-) \mid M \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \mathcal{A}\})$ одноточечное для всех $\mathcal{A} \in GX$. Отметим, что $\xi(\mathcal{A}) \in K$ и предположим, что существует $x \in K$ такое, что $x \neq \xi(\mathcal{A})$. Для каждого $M \in \mathcal{A}$

выберем точку $p(M) \in \xi^{-1}(x) \cap M^+$. Пусть множество $M \in \exp X$ пересекает все элементы системы $\mathcal{A}$. Выберем точку $p'(N) \in \xi^{-1}(x) \cap N^-$. Пусть множество β является замыканием множества $\{p(M) \mid M \in \mathcal{A}\} \cup \{p'(N) \mid N \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \mathcal{A}\}$. Определим элемент $\mathfrak{A} \in G^2X$, положив $\mathfrak{A} = rGX(\{\beta\} \cup \{\{\mathcal{A}, p(M)\} \mid M \in \mathcal{A}\} \cup \{\{\mathcal{A}, p'(N)\} \mid N \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \mathcal{A}\})$. Тогда $\xi \circ G\xi(\mathfrak{A}) = \xi \circ \eta X(\xi(\beta)) = \xi \circ \eta X(x) = x$. Нетрудно убедиться, что $\mu X(\mathfrak{A}) \in \cap\{A^+ \mid A^+ \in \mathfrak{A}\} \cap (\cap \{A^- \mid A \in \exp X,\ A^- \cap \alpha \neq \varnothing$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}\})$ и $\xi \circ \mu X(\mathfrak{A}) \in \xi(\cap\{A^+ \mid A \in \exp X,\ A^+ \supset \beta\} \cap (\cap\{A^+ \mid A \in \exp X,\ A^+ \supset \{p(M), \mathcal{A}\}$ для некоторого $M \in \mathcal{A}\}) \cap (\cap\{A^+ \mid A \in \exp X,\ A^+ \supset \{p'(N) \mathcal{A}\}$ для некоторого $N \in \exp X$, пересекающего все элементы множества $\mathcal{A}\} \cap (\cap\{A^- \mid A \in \exp X,\ p(M) \in A^-$ для всех $M \in \mathcal{A}$ и $p'(N) \in A^-$ для каждого $N \in \exp X$, пересекающего все элементы множества $\mathcal{A}\}) \cap \cap(\cap \{A^- \mid A \in \exp X,\ \ \mathcal{A} \in A^-\}) \in \xi(\cap\{A^+ \mid \mathcal{A} \in A^+\} \cap (\cap\{A^- \mid \mathcal{A} \in \mathcal{A}^-\})) = \xi(\mathcal{A})$, т. е. $\xi(\mathcal{A}) = x$.

Пусть теперь существуют точки $x_1, x_2 \in X$, не разделяющиеся дополнениями до элементов предбазы $\mathcal{G}$. Положим $\mathcal{A} = rX(\{\{x_1, x_2\}\} \cup \{\overline{X \setminus S} \mid \times \times |\overline{X \setminus S} \cap \{x_1, x_2\}| = 1, S \in \mathcal{G}\})$. Используя сцепленность $\mathcal{A}$ и свойство в) предбазы $\mathcal{G}$, можно показать, что x_1 и x_2 принадлежат $K(\mathcal{A})$, т. е. $\{x_1, x_2\} \subset \cap\{S \in \mathcal{G}^+ \mid S \in \mathcal{A}\} \cap (\cap\{S \in \mathcal{G}^- \mid S \cap A \neq \varnothing$ для всех $A \in \mathcal{A}\}) \subset \subset \cap\{\xi(A^+) \mid A \in \mathcal{A}\} \cap (\cap \{\xi(B^-) \mid B \in \exp X$ и $A \cap B \neq \varnothing$ для всех $A \in \mathcal{A}\}) = K(\mathcal{A})$, что противоречит доказанному выше.

Легко убедиться, что точки могут разделяться только дополнениями элементов из разных подсемейств $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}^-$ предбазы $\mathcal{G}$. По построению $\xi(\mathcal{A}) = \cap\{A \in \mathcal{G}^+ \mid A \in \mathcal{A}\} \cap (\cap\{B \in \mathcal{G}^- \mid$ для каждой $A \in \mathcal{A}$ $B \cap A \neq \varnothing\}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть X — метризуемый континуум, наделенный структурой решетки Лоусона. Тогда X — абсолютный ретракт.*

Доказательство. По теореме Моисеева [5] $GX \in AR$. Отображение $\eta X \circ \xi$ является ретракцией пространства GX на подпространство, гомеоморфное X, откуда $X \in AR$.

Пусть $(X, \mathcal{G})$, $(X', \mathcal{G}')$ — пространства с фиксированными бисуперкомпактными предбазами. Отображение $f: X \to X'$ называется бивыпуклым, если для каждого $S' \in \mathcal{G}'^+$ $(S' \in \mathcal{G}'^-)$ множество $f^{-1}(S')$ является пересечением некоторого подсемейства системы $\mathcal{G}^+$ $(\mathcal{G}^-)$.

Теорема 3. *Пусть (X, ξ) и (X', ξ') —* **G**-*алгебры. Следующие условия эквивалентны*:

1) $f: (X, \xi) \to (X', \xi')$ — *морфизм* **G**-*алгебр*;
2) f — *полный гомоморфизм решеток X и X'*;
3) $f: (X, \mathcal{G}) \to (X', \mathcal{G}')$ — *бивыпуклое отображение.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $f: (X, \xi) \to (X', \xi')$ — морфизм **G**-алгебр и $C \in \exp X$. Тогда $f(\inf C) = f \circ \xi(\{B \in \exp X \mid B \supset C\}) = \xi'(\{B \in \exp X' \mid B \supset f(C)\}) = \inf(f(C))$. Для sup рассуждения проводятся аналогично.

$2 \Rightarrow 1$. Если $f: X \to X'$ полный гомоморфизм решеток, то для каждого $\mathcal{A} \in GX$ имеем $f \circ \xi(\mathcal{A}) = f(\sup\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}) = \sup\{\inf f(A) \mid A \in \mathcal{A}\} = \xi' \circ Gf(\mathcal{A})$, т. е. f — морфизм **G**-алгебр.

$1 \Rightarrow 3$. Пусть $f: (X, \xi) \to (X', \xi')$ — морфизм **G**-алгебр. Для любого $A \subset X$ положим $I^{\pm}_{\mathcal{G}}(A) = \cap\{S \in \mathcal{G}^{\pm} \mid S \supset A\}$. Предположим, что отображение f не является бивыпуклым и $f^{-1}(T) \neq I^+_{\mathcal{G}}(f^{-1}(T))$, где $T \in \mathcal{G}'^+$. Выберем $a \in I^+_{\mathcal{G}}(f^{-1}(T)) \setminus f^{-1}(T)$ и положим $\mathcal{A} = \{A \in \exp X \mid a \in A$, или $f^{-1}(T) \subset \subset A\}$. Тогда $\xi(\mathcal{A}) = \cap\{A \in \mathcal{G}^+ \mid a \in A\} \cap (\cap\{A \in \mathcal{G}^+ \mid A \supset f^{-1}(T)\}) \cap (\cap\{A \in \in \mathcal{G}^- \mid a \in A$ и $A \cap f^{-1}(T) \neq \varnothing\})$. Поскольку $a \in I^+_{\mathcal{G}}(f^{-1}(T))$, то $\xi(\mathcal{A}) = a$. Но, с другой стороны, $\xi' \circ Gf(\mathcal{A}) \in I^+_{\mathcal{G}'}(f \circ f^{-1}(T) = I^+_{\mathcal{G}'}(T) = T$, т. е. $a \in f^{-1}(T)$. Противоречие. Аналогически исчерпывается случай $T \in \mathcal{G}'^-$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $f:(X, \mathcal{G}) \to (X', \mathcal{G}')$ — бивыпуклое отображение и $\mathcal{A} \in GX$. Тогда $f \circ \xi(\mathcal{A}) = f(\bigcap\{S \in \mathcal{G}^+ | S \supset A$ для некоторого $A \in \mathcal{A}\} \bigcap (\bigcap \{S \in \mathcal{G}^- | S \cap \cap A \neq \varnothing$ для всех $A \in \mathcal{A}\}$. С другой стороны, $\xi' \circ Gf(\mathcal{A}) = \bigcap\{S \in \mathcal{G}'^+ | S \supset \supset f(A)$ для некоторого $A \in \mathcal{A}\} \bigcap (\bigcap\{S \in \mathcal{G}'^- | S \cap f(A) \neq \varnothing$ для каждого $A \in \mathcal{A}\}$.

Поскольку f-бивыпуклое отображение, то для каждого множества $S \in \mathcal{G}^+$, содержащего множество $f(A)$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$, имеем $f^{-1}(S) = = \bigcap \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}^+$, и каждый элемент $L \in \mathcal{L}$ содержит множество A. Таким образом, $S = \bigcap\{fL | L \in \mathcal{L},\ L \supset A\}$. Аналогично для каждого $S \in \mathcal{G}'^-$ имеем $S = \bigcap\{fL | L \in \mathcal{L}'$ и $L \cap A \neq \varnothing$ для всех $A \in \mathcal{A}\}$, где $\mathcal{L}' \subset \mathcal{G}^-$. Получим, что $\xi' \circ Gf(\mathcal{A}) = \bigcap\{f(S) | S \in \mathcal{G}^+,\ S \supset A$ для некоторого $A \in \mathcal{A}\} \bigcap \bigcap (\bigcap\{f(S) | S \in \mathcal{G}^-,\ A \cap S \neq \varnothing$ для всех $A \in \mathcal{A}\} = f \circ \xi(\mathcal{A})$. Теорема доказана.

3. Свободные $\mathbf{G}$-алгебры. Для каждой решетки X положим $qX = \{x \in X |$ если $x = \sup\{y, z\}$, то $x \in \{y, z\}$ и если $x = \inf\{y_1, z_1\}$, то $x \in \{y_1, z_1\}\}$.

Лемма 6. *Для каждого X имеем $qGX = \eta X(X)$.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ и $\eta X(a) = \mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$. Если $\{a\} \in \mathcal{B}_i$, то тогда $\eta X(a) = \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$. Пусть теперь $\eta X(a) = \mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2$. Тогда $\{a\} \in \in \mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2$ и, предполагая, что семейство $\mathcal{B}_i$ содержит элемент, не содержащий точки a, получаем, что все элементы семейства $\mathcal{B}_j$, где $\{i, j\} = = \{1, 2\}$, содержат a, т. е. $\mathcal{B}_j = \eta X(a)$. Таким образом, $\eta X(X) \subset qGX$.

Покажем обратное включение. Пусть $\mathcal{A} \in qGX \setminus \eta X(X)$. Возможны два случая: 1) $\mathcal{A}$ содержит неодноточечное, минимальное по отношению включения множество A; 2) все минимальные элементы семейства $\mathcal{A}$ одноточечны и их объединение образует (очевидно, неодноточечное) множество B. В случае 1 положим $A = A_1 \bigcup A_2$, где A_1, A_2 — замкнутые множества и $A_1 \neq A \neq A_2$. Пусть $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} \bigcup rX(\{A_i\})$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \bigcap \mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A} \notin \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$. В случае 2 положим $B = B_1 \bigcup B_2$, где B_1, B_2 — замкнутые множества и $B_1 \neq B \neq B_2$. Пусть $\mathcal{B}_i = \{C \in \exp X | C \bigcap B_i \neq \varnothing\}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ и $\mathcal{A} \notin \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$.

Теорема 4. *Пусть (X, ξ) — $\mathbf{G}$-алгебра. Следующие условия эквивалентны*: 1) (X, ξ) — *свободная* $\mathbf{G}$-*алгебра*; 2) (X, ξ) *свободно порождается подпространством* qX; 3) (X, ξ) *изоморфна* $(GqX, \mu qX)$.

Схема доказательства этой теоремы дублирует схему доказательства теоремы 4 [4] с использованием леммы 6 вместо леммы 9 [4].

Отметим, что теорема 4 содержит результат С. А. Либера [7] об описании свободных решеток Лоусона над компактами.

1. *Eilenberg S., Moore I. C.* Adjoint functors and triples // Ill. J. Math.— 1965.— **9**, N 3.— P. 381—398.
2. *Wyler O.* Algebraic theories of continuous lattices // Lect. Notes Math.— 1981.— **871**.— P. 390—413.
3. *Świrszcz T.* Monadic functors and convexity // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci mat., astron. et phys.— 1974.— **22**, N 1.— P. 39—42.
4. *Заричный М. М.* Монада суперрасширения и ее алгебры // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 3.— С. 303—309.
5. *Моисеев Е. В.* О пространствах замкнутых гиперпространств включения // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика.— 1988.— № 3.— С. 54—57.
6. *Curtis D. W.* Growth hyperspaces of Peano continuum // Trans. Amer. Math. Soc.— 1976.— **238**.— P. 271—283.
7. *Либер С. А.* Об $\mathcal{L}$-свободных компактных решетках // Исследования по алгебре.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та.— 1977.— Вып. 5.— С. 34—36.
8. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988.— 252 с.
9. *Van Mill J.* Supercompactness and Wallman spaces // Math. Cent. Tracts.— 1977.— **85**.— 238 p.
10. *Lawson I. D.* Topological semilattices with small semilattices // J. London Math. Soc.— 1969.— **11**.— P. 719—724.
11. *McWaters M. M.* A note on topological semilattices // J. Lond. Math. Soc. Ser. 2.— 1969.— **1**, N 4.— P. 64—66.
12. *Биркгоф Г.* Теория решеток.— М. : Наука, 1984.— 564 с.

Львов. ун-т

Получено 17.02.89