УДК 519.21
И. В. Скороход

О предельном поведении колебательной системы при наличии случайных возмущений параметров этой системы. II

Изучается асимптотическое поведение решения линейной системы второго порядка при наличии случайных возмущений, представленных эргодическим марковским процессом с конечным множеством состояний. Исследован случай, когда усредненная система описывает простое гармоническое колебание.

Вивчається асимптотична поведінка розв'язку лінійної системи другого порядку при наявності випадкових збурень, зображених ергодичним марківським процесом зі скінченною множиною станів. Досліджено випадок, коли усереднена система описує просте гармонічне коливання.

В настоящей статье продолжается начатое в [1] изучение асимптотического поведения решения системы

$$dx_\varepsilon(t)/dt = a_{11}(\nu_\varepsilon(t))\,x_\varepsilon(t) + a_{12}(\nu_\varepsilon(t))\,y_\varepsilon(t),$$
$$dy_\varepsilon(t)/dt = a_{21}(\nu_\varepsilon(t))\,x_\varepsilon(t) + a_{22}(\nu_\varepsilon(t))\,y_\varepsilon(t)$$

в предположении, что $\nu_\varepsilon(t) = \nu(t/\varepsilon)$ — эргодический однородный марковский процесс с конечным числом состояний и эргодическими вероятностями π_k, а усредненная система

$$d\bar{x}(t)/dt = \bar{a}_{11}\bar{x}(t) + \bar{a}_{12}\bar{y}(t),\ \ d\bar{y}(t)/dt = \bar{a}_{21}\bar{x}(t) + \bar{a}_{22}\bar{y}(t)$$

описывает простое гармоническое колебание, т. е. имеет вид

$$d\bar{x}(t)/dt = \bar{y}(t),\ \ d\bar{y}(t)/dt = -\bar{x}(t). \tag{1}$$

После перехода к полярным координатам $\varphi_\varepsilon(t) = \operatorname{Arg}\{x_\varepsilon(t) + iy_\varepsilon(t)\}$, $r_\varepsilon(t) = \sqrt{x_\varepsilon^2(t) + y_\varepsilon^2(t)}$ задача сводилась к исследованию асимптотики угла поворота $\varphi_\varepsilon(t)$ и радиуса $r_\varepsilon(t)$. В [1] показано, что на отрезках времени порядка $O(1/\varepsilon)$ $\varphi_\varepsilon(t)$ отличается от предельной величины на величину диффузионного процесса на окружности с постоянными коэффициентами. Данная статья посвящена исследованию асимптотического поведения радиуса $r_\varepsilon(t)$.

Нетрудно видеть, что функция $r_\varepsilon(t)$ удовлетворяет соотношению $r_\varepsilon(t) = r(0)\exp\left\{\int_0^t L(\nu_\varepsilon(s), \varphi_\varepsilon(s))\,ds\right\}$, где

$$L(k, \varphi) = a_{11}(k)\cos^2\varphi + (a_{12}(k) + a_{21}(k))\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}(k)\sin^2\varphi. \tag{2}$$

В силу (1) выполняется условие $\sum\limits_k L(k, \varphi)\,\pi_k = 0$.

Пусть $P_{ij}(t) = P\{\nu(t) = j \mid \nu(0) = i\}$ — вероятности перехода $\nu(t)$; $\alpha > 0$, $C > 0$ такие, что

$$|P_{ij}(t) - \pi_j| \leqslant Ce^{-\alpha t}. \tag{3}$$

Далее определим

$$r(j, k) = \int_0^\infty (P_{kj}(t) - \pi_j)\,dt, \tag{4}$$

$$c(\varphi) = \sum_{k,l} \pi_k r(l, k)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,L(l, \varphi)\,G(k, \varphi),$$

где

$$G(k,\varphi)=1+(a_{21}(k)-1)\cos^2\varphi+(a_{22}-a_{11})\cos\varphi\sin\varphi-$$

$$-(a_{12}+1)\sin^2\varphi,\quad b(\varphi)=\sum_{k,l}\pi_k r(l,k)L(k,\varphi)L(l,\varphi),$$

$$\bar c=1/2\pi\int_0^{2\pi}c(\varphi)\,d\varphi,\ \bar b=1/2\pi\int_0^{2\pi}b(\varphi)\,d\varphi.$$

Значения $\bar b$ и $\bar c$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\bar b=\pi/4\sum_{k,j}\pi_k r(j,k)[3a_{11}(k)a_{11}(j)+(a_{12}(k)+a_{21}(k))(a_{12}(j)+$$

$$+a_{21}(j))+3a_{22}(k)a_{22}(j)+2a_{11}(k)a_{22}(j)],$$

$$\bar c=\pi/2\sum_{k,j}\pi_k r(j,k)[(a_{12}(k)+a_{21}(k))(a_{21}(j)-1)-$$

$$-(a_{12}(k)+a_{21}(k))(a_{12}(j)+1)].$$

Теорема. *Пусть* $\eta_\varepsilon(t)=\int_0^t L(\nu_\varepsilon(s),\ \varphi_\varepsilon(s))\,ds$. *Тогда* $\eta_\varepsilon(t/\varepsilon)$ *слабо сходится при* $\varepsilon\to0$ *к диффузионному процессу с постоянными коэффициентами* $\bar b$ *и* $\bar c$ ($\bar b$ — *коэффициент диффузии*, $\bar c$ — *коэффициент сноса*).

Доказательство. Выберем h и ε так, чтобы $h/\varepsilon\to0$, $h^2/\varepsilon^3\to0$, $h/\varepsilon^2\to\infty$. Пусть далее функция Φ трижды непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своими производными. Согласно [2, теорема 9, с. 415] достаточно показать, что

$$M[\Phi(\eta_\varepsilon(t+h/\varepsilon))-\Phi(\eta_\varepsilon(t/\varepsilon))/\nu(t/\varepsilon)=i,\ \varphi_\varepsilon(t/\varepsilon)=\bar\varphi,\eta_\varepsilon(t/\varepsilon)=z]=$$

$$=hb(\bar\varphi)\Phi'(z)+\frac12hc(\bar\varphi)\Phi''(z)+o(h).$$

Рассмотрим приращение:

$$M[\Phi(\eta_\varepsilon(t+h/\varepsilon))-\Phi(\eta_\varepsilon(t/\varepsilon))/\nu(t/\varepsilon)=i,\quad\varphi_\varepsilon(t/\varepsilon)=\bar\varphi,$$

$$\eta_\varepsilon(t/\varepsilon)=z]=M[\Phi'(z)\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)+1/2\Phi''(z)(\eta_\varepsilon(h/\varepsilon))^2+$$

$$+O(|\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)|^3)/\nu_\varepsilon(0)=i,\ \varphi_\varepsilon(0)=\bar\varphi]. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к оценке каждого из слагаемых правой части этого соотношения, отметим, что поскольку функция $L(k,\varphi)$ ограничена (см. (2)), то $|\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)|\leqslant ah/\varepsilon$, где $a=\sup|L(k,\varphi)|$.

Теперь оценим соотношение

$$[\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)]^2=2\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s L(\nu_\varepsilon(u),\ \varphi_\varepsilon(u))\,du\ L(\nu_\varepsilon(s),$$

$$\varphi_\varepsilon(s))\,ds=2\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^s L(\nu_\varepsilon(u),\ \varphi_\varepsilon(0))\,du\ L(\nu_\varepsilon(s),\ \varphi_\varepsilon(s))\,ds+$$

$$+O\Big(\int_0^{h/\varepsilon}a\int_0^s d|\varphi_\varepsilon(u)-\varphi_\varepsilon(0)|\,duds\Big),$$

где d такое, что $|L(k,\varphi_1)-L(k,\varphi_2)|\leqslant d|\varphi_1-\varphi_2|$.

Поскольку для угловой координаты φ_ε справедливо соотношение [1]

$$d\varphi_\varepsilon/dt=1+(a_{21}-1)\cos^2\varphi_\varepsilon-(a_{12}+1)\sin^2\varphi_\varepsilon+(a_{22}-a_{11})\cos\varphi_\varepsilon\sin\varphi_\varepsilon,$$

то, следовательно, существует $q>0$ такое, что $|d\varphi_\varepsilon/dt|\leqslant q$ и $|\varphi_\varepsilon(u)-\varphi_\varepsilon(0)|\leqslant qu$, а $\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s ududs=O(h^3/\varepsilon^3)$. Аналогично

$$\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s (\nu_\varepsilon(u),\ \varphi_\varepsilon(0))\,du\,(L(\nu_\varepsilon(s),\ \varphi_\varepsilon(s))-L(\nu_\varepsilon(s),\ \varphi_\varepsilon(0))\,ds=$$

$$=O\Big(\int\limits_0^{h/\varepsilon}s\int\limits_0^s du\Big)=O(h^3/\varepsilon^3).$$

Таким образом, получаем

$$[\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)]^2=2\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s L(\nu_\varepsilon(u),\ \overline{\varphi})\,du\ \ L(\nu_\varepsilon(s),\overline{\varphi})\,ds+O(h^3/\varepsilon^3).$$

Учитывая (3) и (4), записываем интеграл в правой части через эргодические вероятности и вероятности перехода

$$M\Big(\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s L(\nu_\varepsilon(u),\overline{\varphi})\,du\ \ L(\nu_\varepsilon(s),\overline{\varphi})\,ds/\nu(0)=i\Big)=$$

$$=\sum_{k,l}\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s P_{ik}(u/\varepsilon)\,P_{kl}(s-u/\varepsilon)\,L(k,\overline{\varphi})\,L(l,\overline{\varphi})\,duds=$$

$$=\sum_{k}\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s P_{ik}(u/\varepsilon)\,(P_{kl}(s-u/\varepsilon)-\pi_l)\,L(l,\overline{\varphi})\,L(k,\overline{\varphi})\,duds=$$

$$=h\sum_{k,l}\pi_k r(l,k)\,L(k,\overline{\varphi})\,L(l,\overline{\varphi})+o(h)+$$

$$+O\Big(\int\limits_0^{h/\varepsilon}du\int\limits_{h/\varepsilon-s}^{\infty}e^{(-\alpha s)/\varepsilon}ds+\varepsilon\sum_k\int\limits_0^{\infty}|P_{ik}(u/\varepsilon)-\pi_k|\,du\Big).$$

Поскольку

$$O\Big(\int\limits_0^{h/\varepsilon}du\int\limits_{h/\varepsilon-s}^{\infty}e^{(-\alpha s)/\varepsilon}ds\Big)=O(\varepsilon^2)=o(h),$$

$$\varepsilon\sum_k\int\limits_0^{\infty}|P_{ik}(u/\varepsilon)-\pi_k|\,du)=o(h),$$

то

$$M\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s L(\nu_\varepsilon(u),\ \overline{\varphi})\,du\ \ L(\nu_\varepsilon(s),\ \overline{\varphi})\,ds\,|\,\nu(0)=i)=$$

$$=h\sum_{k,l}\pi_k r(l,k)\,L(k,\overline{\varphi})\,L(l,\overline{\varphi})+o(h),$$

$$\overline{b}(\overline{\varphi})=\sum_{k,l}\pi_k r(l,k)\,L(k,\overline{\varphi})\,L(l,\overline{\varphi}).$$

В результате получена оценка

$$M([\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)]^2\,|\,\nu(0)=i,\varphi_\varepsilon(0)=\overline{\varphi})=hb(\overline{\varphi})+o(h)+O(h^3/\varepsilon^3). \tag{6}$$

Оценим теперь первый член правой части (5).

$$M(\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)\,|\,\nu_\varepsilon(0)=i,\ \varphi_\varepsilon(0)=\overline{\varphi})=$$

$$= M\left(\int_0^{h/\varepsilon} L(\nu_\varepsilon(s), \varphi_\varepsilon(s))\, ds / \nu_\varepsilon(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}\right) =$$

$$= M\left(\int_0^{h/\varepsilon} L(\nu_\varepsilon(s), \bar{\varphi})\, ds + \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} \frac{\partial}{\partial\varphi} L(\nu_\varepsilon(s),\right.$$

$$\left.\varphi_\varepsilon(u))\frac{d\varphi_\varepsilon}{du}\, du ds / \nu_\varepsilon(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}\right) =$$

$$= M\left(\int_0^{h/\varepsilon} L(\nu_\varepsilon(s), \bar{\varphi})\, ds + \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} \frac{\partial}{\partial\varphi} L(\nu_\varepsilon(s),\right.$$

$$\left.\varphi_\varepsilon(u))\, G(\nu_\varepsilon(u), \varphi_\varepsilon(u))\, du ds / \nu_\varepsilon(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}\right).$$

Аналогичный прием использовался в [1] при исследовании асимптотического поведения угловой функции $\varphi_\varepsilon(t)$ (см. [3], гл. II, § 2).

Поскольку (см. [1], лемма 4) выполняется равенство

$$\int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} \frac{\partial}{\partial\varphi} L(\nu_\varepsilon(s), \varphi_\varepsilon(u))\, G(\nu_\varepsilon(u), \varphi_\varepsilon(u))\, du ds =$$

$$= \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} \frac{\partial}{\partial\varphi} (L(\nu_\varepsilon(s), \bar{\varphi})\, G(\nu_\varepsilon(u), \bar{\varphi}))\, du ds + O(h^3/\varepsilon^3),$$

то, следовательно,

$$M(\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)/\nu_\varepsilon(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}) = \sum_k \int_0^{h/\varepsilon} (P_{ik}(u/\varepsilon) - \pi_k)\, L(k, \bar{\varphi})\, du +$$

$$+ h\sum_k \pi_k r(l, k)\frac{\partial}{\partial\varphi} L(l, \bar{\varphi})\, G(k, \bar{\varphi}) + o(h).$$

Обозначим через $l(i, \varphi) = \sum_k r(k, i)\, L(k, \bar{\varphi})$. Тогда

$$M(\eta_\varepsilon(h/\varepsilon)/\nu_\varepsilon(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}) = hc(\bar{\varphi}) + \varepsilon l(i, \bar{\varphi}) +$$

$$+ o(h) + O\left(\int_{h/\varepsilon}^{\infty} e^{(-\alpha t)/\varepsilon} dt\right) + O(h^3/\varepsilon^3). \tag{7}$$

Нетрудно установить, что

$$\varepsilon Ml[(\nu(h/\varepsilon^2),\ \varphi_\varepsilon(h/\varepsilon))/\nu(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}] =$$

$$= \varepsilon M(l(\nu(h/\varepsilon^2),\ \bar{\varphi})/\nu(0) = i,\ \varphi_\varepsilon(0) = \bar{\varphi}) +$$

$$+ \varepsilon M\int_0^{h/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\varphi} l(\nu(h/\varepsilon^2),\ \varphi_\varepsilon(u))\, G(\nu(u/\varepsilon),\ \varphi_\varepsilon(u))\, du =$$

$$= o(h) + O(h/\varepsilon^2) + \varepsilon M\left(\int_0^{h/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\varphi} l(\nu(h/\varepsilon^2),\right. \tag{8}$$

$$\left.\bar{\varphi})\, G(\nu(u/\varepsilon), \bar{\varphi})\, du/\nu(0) = i\right) = o(h) +$$

$$+ \varepsilon\int_0^{h/\varepsilon} \Sigma P_{ik}(u/\varepsilon)\, P_{kj}(u/\varepsilon)\, P_{kj}(h/\varepsilon^2 - u/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi} l(j, \varphi)\, G(k, \bar{\varphi})\, du =$$

$$= o(h) + O(\varepsilon^2) = o(h).$$

Сопоставив теперь соотношения (5) и (6), (7) и (8), и завершим доказательство теоремы.

1. *Скороход И. В.* О предельном поведении колебательной системы при наличии случайных возмущений параметров этой системы. I // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 10. — С. 1357—1364.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
3. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1987.— 328 с.

Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев

Получено 27.04.88