УДК 517.5

А. И. Швай, П. Е. Антонюк, С. Ю. Дзядык, З. В. Зарицкая

Приближение функции $|x|^r$ и ее производных

Рассмотрены вопросы эффективного приближения в $C[-1, 1]$ производных функции $|x|^r$ $r > 1$, при помощи многочленов, введенных В. К. Дзядыком.

Розглянуті питання ефективного наближення в $C[-1, 1]$ похідних функції $|x|^r$, $r > 1$, за допомогою многочленів, впроваджених В. К. Дзядиком.

Известно, что каждую специальную функцию $y(x)$, являющуюся решением сингулярного уравнения, для которого точка 0 является регулярной особой точкой,

$$a_0(x)\, x^k y^{(k)} + a_1(x)\, x^{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)\, y = 0,$$

где $a_j(x)$ — многочлены, при этом $a_0(x) \geqslant C > 0$, $x \in [0, h]$, можно представить в виде $y(x) = x^r \varphi(x)$ или $y(x) = x^r \ln x \varphi(x) + x^r \psi(x)$ и др., где r — некоторое, вообще говоря, комплексное число; $\varphi, \psi, \ldots$ — некоторые аналитические функции. Поэтому естествен большой интерес к вопросам приближения функций $|x|^r$, $r \in \mathbb{R}$.

Этот вопрос рассматривали А. Лебег и Валле Пуссен. С. Н. Бернштейн в [1] доказал, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} nE_n(|x|)$, примерно равный $0{,}282 \pm 0{,}004$, и указал метод его вычисления.

В. К. Дзядык [2] для функции $|x|^r$ указал эффективный метод построения многочленов $y_{2n}(x)$ хорошего равномерного приближения, для которых

$$0{,}76\tau \leqslant \| |x| - y_{2n}(x) \| \leqslant 1{,}02\tau, \quad \tau = \tau(n) = 1/2\pi n,$$

и поставил задачу об эффективном построении многочленов хорошего равномерного приближения производных функции $|x|^r$.

В настоящей статье сформулированный вопрос исследуется методом, примененным в [2].

Пусть дана функция $y(x) = |x|^r$, $r > 1$, $x \in [-1, 1]$. Поскольку $y'(x) = r|x|^{r-1}\operatorname{sign} x$, а при $r \geqslant 2$ $y''(x) = r(r-1)|x|^{r-2}$, то, очевидно, для построения многочленов хорошего равномерного приближения производных функции $|x|^r$ достаточно рассмотреть приближение функции

$$y(x) = |x|^r \operatorname{sign} x, \quad r > 1. \tag{1}$$

Функция $y(x) = |x|^r \operatorname{sign} x$ является нечетной и при $x \geqslant 0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = ry$, $y(1) = 1$, или (что то же самое) интегральному уравнению

$$xy - (1 + r)\int_0^x y(t)\, dt = 0, \quad y(1) = 1. \tag{2}$$

При $n > [r/2]$ рассмотрим на $[0, 1]$ многочлен

$$y_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} e_{2j+1} x^{2j+1}, \tag{3}$$

удовлетворяющий условию

$$y_{2n+1}(1) = 1. \tag{4}$$

Исходя из интегрального уравнения (2), рассмотрим интегральное уравнение

$$xy_{2n+1}(x) - (1 + r)\int_0^x y_{2n+1}(t)\, dt = -\tau x T_{2n+1}(x), \tag{5}$$

где τ — параметр, а $T_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} t_{2j+1} x^{2j+1}$ — многочлен Чебышева. Для определенности будем считать n четным числом.

На основании (5) получаем

$$x \sum_{0}^{n} c_{2j+1} x^{2j+1} - (1+r) \sum_{0}^{n} \frac{c_{2j+1}}{2j+2} x^{2j+2} = -\tau x \sum_{0}^{n} t_{2j+1} x^{2j+1}.$$

Отсюда, учитывая (4), находим

$$y_{2n+1}(x) = -\tau \sum_{0}^{n} \frac{2j+2}{2j-r+1} t_{2j+1} x^{2j+1}, \tag{6}$$

где

$$\tau = -\left[\sum_{0}^{n} \frac{2j+2}{2j-r+1} t_{2j+1}\right]^{-1}, \quad r \neq 2k-1. \tag{7}$$

После преобразований можно получить

$$y(x) - \check{y}_{2n+1}(x) = \tau' \left[T_{2n+1}(x) - 2rx^r \int_x^1 \frac{T_{2n+1}(s)}{s^{r+1}} ds\right], \tag{8}$$

где

$$\check{y}_{2n+1}(x) = \frac{1}{1+\tau} y_{2n+1}(x) - \frac{\tau}{1+\tau} \frac{1-r}{2r} T_{2n+1}(x), \tag{9}$$

$$\tau' = \frac{\tau(1+r)}{2r(1+\tau)}. \tag{10}$$

Параметр $\tau'(n)$ имеет такой же порядок, как и параметр τ. Поэтому исследуем поведение параметра $\tau = \tau(n)$.

На основании (7) находим

$$-\tau^{-1} = 1 + (1+r) \sum_{j=0}^{n} \frac{t_{2j+1}}{2j+1-r} = 1 + (1+r)\Sigma_0. \tag{11}$$

В зависимости от значений числа r рассмотрим разные представления суммы Σ_0

а) $r \in (2k, 2k+1)$, $k \geqslant 1$,

$$\Sigma_0 = \sum_{j=0}^{[r/2]-1} \frac{t_{2j+1}}{2j+1-r} + \left(\int_0^{1/2n} + \int_{1/2n}^{1}\right) \frac{T_{2n+1}(s) - \sum_{j=0}^{[r/2]-1} t_{2j+1} s^{2j+1}}{s^{r+1}} ds = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{12}$$

При $r \in (0, 1)$ (при $k = 0$),

$$\Sigma_0 = \int_0^1 \frac{T_{2n+1}(s)}{s^{r+1}} ds, \tag{13}$$

т. е. $\sigma_1 = 0$;

б) $r \in (2k+1, 2k+2)$, $k \geqslant 0$,

$$\Sigma_0 = \sum_{j=0}^{[r/2]} \frac{t_{2j+1}}{2j+1-r} + \left(\int_0^{1/2n} + \int_{1/2n}^{1}\right) \frac{T_{2n+1}(s) - \sum_{j=0}^{[r/2]} t_{2j+1} s^{2j+1}}{s^{r+1}} ds = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{12¹}$$

Оценим каждое из чисел σ_1, σ_2, σ_3 в отдельности.

Учитывая, что t_{2j+1} выражаются по формулам (см., например, [3, с. 45])

$$t_{2j+1} = \frac{(-1)^{n+j}}{(2j+1)!}(2n+1)(n+j)[n^2-(j-1)^2]\dots[n^2-1^2]\,n2^{2j}, \tag{14}$$

находим

1. а) $$|\sigma_1| = \left|\sum_{j=0}^{[r/2]-1}\frac{t_{2j+1}}{2j+1-r}\right| \leqslant A\,|t_{2([r/2]-1)+1}| \leqslant A_1 n^r n^{2[r/2]-r-1} = o(n^r);$$

б) $$|\sigma_1| = \left|\sum_{j=0}^{[r/2]}\frac{t_{2j+1}}{2j+1-r}\right| \leqslant A'\,|t_{2[r/2]+1}| \leqslant A_1' n^r n^{2[r/2]+1-r} = o(n^r).$$

Значит, в любом случае

$$\sigma_1 = o(n^r). \tag{15}$$

2. а) $r\in(2k, 2k+1)$, $k\geqslant 0$,

$$\sigma_2 = \sigma_2(r) = \int_0^{1/2n}\sum_{j=[r/2]}^{n} t_{2j+1}s^{2j-r}ds = \sum_{j=[r/2]}^{n}\frac{t_{2j+1}}{2j+1-r}\left(\frac{1}{2n}\right)^{2j+1-r} =$$

$$= (-1)^{[r/2]}\sum_{j=[r/2]}^{n}\frac{(-1)^{j-[r/2]}}{(2j+1)!}\,\frac{n^r(2n+1)(n+j)[n^2-(j-1)^2]\dots[n^2-1^2]}{(2j+1-r)\,2^{1-r}n^{2j}} =$$

$$= (-1)^{[r/2]}\sigma_2', \tag{16}$$

где

$$\sigma_2' \geqslant \frac{(2n+1)\,n^r\,(n+[r/2])\,[n^2-([r/2]-1)^2]\dots[n^2-1^2]}{(2[r/2]+1)!\,(2[r/2]+1-r)\,2^{1-r}n^{2[r/2]}} -$$

$$-\frac{(2n+1)\,n^r\,(n+[r/2]+1)\,[n^2-[r/2]^2]\dots[n^2-1^2]}{(2[r/2]+3)!\,(2[r/2]+3-r)\,2^{1-r}n^{2[r/2]+2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(2n)^r\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{[r/2]}{n}\right)\left(1-\left(\frac{[r/2]-1}{n}\right)^2\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{(2[r/2]+1)!\,(2[r/2]+1-r)}\left(1-\frac{1}{18}\right) =$$

$$= \frac{(2n)^r\left(1-\frac{1}{18}\right)}{(2[r/2]+1)!\,(2[r/2]+1-r)} + O(n^{r-1}) > 0.$$

В частности, при достаточно больших n и малых $\varepsilon>0$

$$\operatorname{sign}\sigma_2(1-\varepsilon) = (-1)^{[r/2]}, \tag{17}$$

и в то же время, при фиксированном n величина $|\sigma_2(1-\varepsilon)|\to\infty$ при $\varepsilon\to+0$;

б) $r\in(2k+1,\ 2k+2)$, $k\geqslant 0$,

$$\sigma_2(r) \geqslant \frac{(2n)^r\,(1-1/25)}{(2[r/2]+3)!\,(2[r/2]+3-r)} + O(n^{r-1}) > 0. \tag{17¹}$$

3. $$\sigma_3 = \int_{1/2n}^{1}\frac{T_{2n+1}(s)}{s^{r+1}}\,ds - \int_{1/2n}^{1}\sum_{j=1}^{l} t_{2j+1}s^{2j-r}ds = \tau_1-\tau_2, \tag{18}$$

где

$$|\tau_1| = \left|\int_{1/2n}^{1}\frac{T_{2n+1}(s)}{s^{r+1}}\,ds\right| \leqslant C\,(2n)^r,\quad C = \mathrm{const} < \frac{1}{r}. \tag{19}$$

а) $r \in (2k, 2k+1),\ k \geqslant 0$.

При $k = 0,\ r \in (0, 1)$ на основании равенства (13) $\tau_2 = 0$. Поэтому будем считать, что $k \geqslant 1 \Rightarrow [r/2] = k \geqslant 1$

$$\tau_2 = \sum_{j=0}^{[r/2]-1} t_{2j+1} \frac{(2n)^{r-2j-1} - 1}{r - 2j - 1} = \sum_{j=0}^{[r/2]-1} (-1)^j \frac{(2n)^r}{(r - 2j - 1)(2j + 1)!} \times$$

$$\times (1 + O(n^{2[r/2]-1-r})) = (2n)^r \sum_{j=0}^{[r/2]-1} \frac{(-1)^j}{(r - 2j - 1)(2j + 1)!} \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{r+1-2[r/2]}}\right)\right), \tag{20}$$

б) $r \in (2k+1,\ 2k+2),\ k \geqslant 0$,

$$\tau_2 = \sum_{j=0}^{[r/2]} t_{2j+1} \frac{(2n)^{r-2j-1} - 1}{r - 2j - 1} = \sum_{j=0}^{[r/2]} \frac{(-1)^j (2n)^r}{(r - 2j - 1)(2j + 1)!} \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1-2[r/2]}}\right)\right).$$

В частности, при достаточно больших n и малых $\varepsilon > 0$, например, будем иметь

$$\operatorname{sign} \tau_2 (1 + \varepsilon) = (-1)^{[r/2]} \Rightarrow \operatorname{sign} \sigma_3 (1 + \varepsilon) = (-1)^{[r/2]+1}. \tag{20^1}$$

Из (16) — (20) аналогично вытекает, что при r, содержащихся в ε-окрестности нечетных положительных чисел, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ получаем $|\tau^{-1}| \geqslant An^r/\varepsilon$, и значит, в силу (8)

$$E_{2n+1} (|x|^r \operatorname{sign} x) < \frac{\varepsilon}{A} n^{-r}. \tag{21}$$

Исследуем поведение функции $\varphi(x)$ из (8). Полагая $n = 2k,\ x = \sin s$ $t = \sin \sigma$, имеем

$$\varphi(x) = T_{2n+1}(x) - 2rx^r \int_x^1 \frac{T_{2n+1}(t)}{t^{r+1}} dt = \cos(2n+1) \arccos x - 2rx^r \times$$

$$\times \int_x^1 \frac{\cos(2n+1) \arccos t}{t^{r+1}} dt = \cos(4k+1)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) -$$

$$- 2rx^r \int_x^1 \frac{\cos(4k+1)(\pi/2 - \arcsin t)}{t^{r+1}} dt = \sin(2n+1) \arcsin x -$$

$$- 2rx^r \int_x^1 \frac{\sin(2n+1) \arcsin t}{t^{r+1}} dt;$$

$$\varphi(\sin s) = \sin(2n+1) s - 2r \sin^r s \int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sin^{r+1}\sigma} \cos \sigma d\sigma. \tag{22}$$

Рассмотрим следующие два случая:

1. $s \in [0, n^{-1/(r+1)}]$. Учитывая

$$\frac{\cos\sigma}{\sin^{r+1}\sigma} - \frac{1}{\sigma^{r+1}} = \frac{1}{\sin^{r+1}\sigma}\left(\cos\sigma - \left(\frac{\sin\sigma}{\sigma}\right)^{r+1}\right) = O(\sigma^{1-r}), \qquad (23)$$

находим

$$\mathcal{I}(n, s) = \int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sin^{r+1}\sigma}\cos\sigma d\sigma = \int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sigma^{r+1}}\, d\sigma +$$

$$+ \int_s^{\pi/2} \sin(2n+1)\sigma\left(\frac{\cos\sigma}{\sin^{r+1}\sigma} - \frac{1}{\sigma^{r+1}}\right)d\sigma = \int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sigma^{r+1}}\, d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\sigma\left(\frac{\cos\sigma}{\sin^{r+1}\sigma} - \frac{1}{\sigma^{r+1}}\right)\Bigg|_s^{\pi/2} + O\left(\int_s^{\pi/2} \frac{\cos(2n+1)\sigma}{(2n+1)\sigma^r}\, d\sigma\right) =$$

$$= \int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sigma^{r+1}}\, d\sigma + O\left(\frac{s^{1-r}}{n}\right) + O\left(\frac{s^{1-r}+1}{n}\right).$$

Поэтому на основании (22) будем иметь

$$\varphi(\sin s) = \sin(2n+1)s - 2r\sin^r s\left(\int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sigma^{r+1}}\, d\sigma + O\left(\frac{s^{1-r}+1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sin(2n+1)s - 2r\sin^r s \int_s^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\sigma}{\sigma^{r+1}}\, d\sigma + O\left(\frac{s+s^r}{n}\right) = \sin(2n+1)s -$$

$$- 2r((2n+1)\sin s)^r \int_{(2n+1)s}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{r+1}}\, du + O\left(\frac{1}{n^{r+2}}\right) + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2+r}{1+r}}\right) +$$

$$+ O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2r+1}{1+r}}\right) = \sin(2n+1)s - 2r((2n+1)s)^r \int_{(2n+1)s}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{r+1}}\, du +$$

$$+ O\left(n^{-\frac{r'}{1+r}}\right), \quad r' \overset{\text{df}}{=} \min(2+r,\ 2r+1). \qquad (24)$$

2. $s \in \left[n^{-1/(1+r)}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$\mathcal{I}(n, s) = -\frac{1}{2n+1}\int_s^{\pi/2} \frac{\cos\sigma}{\sin^{r+1}\sigma}\, d(\cos(2n+1)\sigma) =$$

$$= -\frac{\cos\sigma\cos(2n+1)\sigma}{(2n+1)\sin^{r+1}\sigma}\Bigg|_s^{\pi/2} - \int_s^{\pi/2} \frac{\cos(2n+1)\sigma}{2n+1}\,\frac{1+r\cos^2\sigma}{\sin^{r+2}\sigma}\, d\sigma =$$

$$= \frac{\cos s\cos(2n+1)s}{(2n+1)\sin^{r+1}s} + O\left(\frac{1}{ns^{r+1}}\right).$$

На основании (22) находим

$$\varphi(\sin s) = \sin(2n+1)s - 2r\sin^r s\left(\frac{\cos s\cos(2n+1)s}{(2n+1)\sin^{r+1}s} + O\left(\frac{1}{ns^{r+1}}\right)\right) =$$

$$= \sin(2n+1)s + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{r/(r+1)}\right). \qquad (25)$$

Учитывая, что при $r > 0$ и $t \to \infty$

$$\int\limits_t^{\pi/2} \frac{\sin u}{u^{r+1}}\,du = \frac{\cos t}{t^{r+1}} + O\left(\frac{1}{t^{r+2}}\right),$$

формулу (24) можно $\forall s \in [n^{-1/(r+1)}, \pi/2]$ записать в виде

$$\varphi(\sin s) = \sin(2n+1)s - 2r((2n+1)s)^r\left(\frac{\cos(2n+1)s}{((2n+1)s)^{r+1}} + O\left(\frac{1}{((2n+1)s)^{r+2}}\right)\right) +$$

$$+ O(n^{-r'/(r+1)}) = \sin(2n+1)s + O(n^{-r/(r+1)}).$$

В силу этого равенства видим, что $\forall s \in [0, \pi/2]$

$$\varphi(\sin s) = \sin(2n+1)s - 2r((2n+1)s)^r \int\limits_{(2n+1)s}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{r+1}}\,du + O(n^{-r/(1+r)}).$$

Таким образом, для оценки правой части равенства (8) представляет значительный интерес задача об исследовании функции

$$\psi(x) = \sin x - 2rx^r \int\limits_x^{\infty} \frac{\sin u}{u^{r+1}}\,du, \quad x \in (0, \infty), \qquad (26)$$

где r — любое положительное число, не равное ни одному из нечетных чисел.

Объединяя результаты [2] и настоящей статьи, получаем метод построения многочленов хорошего приближения функции $|x|^r$ ($r > 0$ и не может принимать целых значений) и ее производных ($r > 1$).

При этом, учитывая, что функция и ее производная отличаются четностью, нужно брать соответственно коэффициенты четных или нечетных многочленов Чебышева и функцию

$$\psi(x) = -\cos x + 2x^r \int\limits_x^{\infty} \frac{\sin u}{u^r}\,du, \quad x \in (0, +\infty),$$

или

$$\psi(x) = \sin x - 2rx^r \int\limits_x^{\infty} \frac{\sin u}{u^{r+1}}\,du.$$

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. мат. о-ва, Сер. 2.— 1912.— **13.**— С. 49—194.
2. *Дзядык В. К.* Об эффективном построении многочленов хорошего равномерного приближения функций $|x|^r$, > 0 // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1985.— **172.**—С. 140—154.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
4. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1988.— 304 с.

Львов. политехн. ин-т.
Луж. пед. ин-т

Получено 24.03.89