УДК 517.512

С. Б. Вакарчук

О наилучшем полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций

В банаховом пространстве, $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, изучавшемся М. И. Гварадзе, установлены связи между наилучшим полиномиальным приближением целой трансцендентной функции и такими ее важными характеристиками, как порядок роста и тип.

У банаховому просторі $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, який вивчався М. І. Гварадзе, встановлені зв'язки між найкращим поліноміальним наближенням цілої трансцендентної функції та такими її важливими характеристиками, як порядок зростання і тип.

Следуя [1, 2], обозначим через $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$, $0 < \lambda \leqslant \infty$, пространство функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| < 1$, для которых

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \left\{\int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^{\lambda}(r, f)\, dr\right\}^{1/\lambda} < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

$$\|f\|_{p,q,\infty} = \sup\{(1-r)^{1/p-1/q} M_q(r, f) : 0 < r < 1\} < \infty,$$

где

$$M_q(r, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{1/q}.$$

При любых $p > 0$ и $q, \lambda \geqslant 1$ $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$ — банахово пространство с нормой $\| f \|_{p,q,\lambda}$, а в остальных случаях — пространство Фреше. Всюду далее рассматриваем только банаховы пространства $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$.

Пусть функция $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ и $\mathcal{P}_k$ — множество полиномов степени не больше k. Наилучшее приближение функции $f(z)$ элементами множества $\mathcal{P}_k$ обозначим $E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) = \inf \{ \| f - p_k \|_{p,q,\lambda} : p_k \in \mathcal{P}_k \}$.

В [3] для $t_k(f)$ — k-й частной суммы ряда Тейлора функции $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ получено следующее соотношение:

$$\lim_{k \to \infty} \| f - t_k(f) \|_{p,q,\lambda} = 0. \tag{1}$$

Поскольку из неравенства $E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \leqslant \| f - t_k(f) \|_{p,q,\lambda}$ и (1) следует $\lim\limits_{k \to \infty} E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) = 0$, то возникает вопрос об установлении связи между коэффициентами Тейлора функции $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ и величинами $E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda))$. В [4] найдены соотношения, определяющие порядок и тип целой функции через ее наилучшее среднеквадратическое приближение в единичном круге. Затем [5, 6] подобные соотношения обнаружены в пространстве аналитических функций A_p ($|z| < 1$), где $p \geqslant 1$. В настоящей статье результаты подобного рода распространены на аналитические функции из пространства $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$.

Напомним, что для порядка ρ и типа σ целой функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ имеют место соотношения

$$\rho = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \ln k}{-\ln |c_k|}, \tag{2}$$

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{k \to \infty}} k^{1/\rho} |c_k|^{1/k}. \tag{3}$$

Под $B(a, b)$, $a, b > 0$, понимаем эйлеров интеграл 1-го рода. Используя его определение [7] для произвольных $\tau, t > 0$ запишем

$$B^{1/\lambda}(\tau\lambda + 1; \lambda t) = \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 x^{\lambda\tau} (1 - x)^{\lambda t - 1} dx \right)^{1/\lambda}, & 1 \leqslant \lambda < \infty, \\ \sup\limits_{0 < x < 1} x^{\tau} (1 - x)^{t} = \tau^{\tau} t^{t} (t + \tau)^{-(t+\tau)}, & \lambda = \infty. \end{cases}$$

Не умаляя общности, проведем доказательства теорем 1—6 для случая $1 \leqslant \lambda < \infty$, поскольку при $\lambda = \infty$ ход рассуждений аналогичен.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z) \in \mathcal{B}(p, 2, \lambda)$, где $0 < p < 2$, $\lambda \geqslant 1$. Условие*

$$\lim_{k \to \infty} \{ E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) B^{-1/\lambda}((k + 1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) \}^{1/k} = 0 \tag{4}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(z)$ была целой.

Доказательство. Пусть $f(z)$ — целая функция. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$ такое, что при $k > k_0$ $|c_k| < \varepsilon^k$. Используя [8], записываем

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) = \| f - t_k(f) \|_{p,2,\lambda} = \Big\{ \int\limits_0^1 (1 - r)^{\lambda(1/p - 1/2) - 1} \times$$

$$\times \Big[\sum_{j=k+1}^{\infty} r^{2j} |c_j|^2 \Big]^{\lambda/2} dr \Big\}^{1/\lambda} \leqslant B^{1/\lambda}((k + 1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) \Big\{ \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j|^2 \Big\}^{1/2}. \tag{5}$$

Поскольку при $k > k_0$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j| < \varepsilon^{k+1}/(1-\varepsilon), \tag{6}$$

то в силу произвольности $\varepsilon > 0$ соотношение (4) получаем из (5), (6), устремляя k к ∞.

Если условие (4) выполнено, то из неравенства

$$|c_{k+1}| < E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) B^{-1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)), \tag{7}$$

которое следует из определения величины $E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = 0$. Значит, $f(z)$ — целая функция, и теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы $f(z) \in \mathcal{B}(p, 2, \lambda)$, где $0<p<2$, $\lambda \geqslant 1$, была целой функцией конечного порядка $\rho \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \{\ln [B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) E^{-1}(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))]\}^{-1} k \ln k = \rho. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть условие (8) выполнено. Тогда, очевидно, имеет место соотношение (4) и в силу теоремы 1 функция $f(z)$ целая. Как и в [4], полагаем ее порядок равным величине α, которая определяется формулой (2). Покажем, что $\alpha = \rho$. На основании (2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, для которого при всех $k > k_0$

$$|c_k| \leqslant k^{-k/(\alpha+\varepsilon)}. \tag{9}$$

При $k > k_0$ из выражения, определяющего $E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))$ и содержащегося в левой части соотношения (5), и неравенства (9) имеем

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) \leqslant k^{-k/(\alpha+\varepsilon)} B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) \times$$
$$\times \{1 - (k+1)^{-2/(\alpha+\varepsilon)}\}^{-1/2}.$$

Отсюда

$$\alpha + \varepsilon \geqslant \frac{k \ln k + \frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon) \ln [1 - (k+1)^{-2/(\alpha+\varepsilon)}]}{\ln [B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) E^{-1}(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))]}. \tag{10}$$

Полагая в (10) $k \to \infty$, в силу (8) и произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\alpha \geqslant \rho$. С другой стороны на основании (7), (8) и (2) имеем $\rho \geqslant \alpha$. Следовательно, $\alpha = \rho$. Необходимость доказывается аналогичным образом [4] с учетом (2) и (7).

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(z) \in \mathcal{B}(p, 2, \lambda)$, где $0 < p < 2$, $\lambda \geqslant 1$, была целой конечного порядка $\rho \in (0, \infty)$ и нормального типа $\sigma \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (\rho e)^{-1} k \{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) B^{-1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2))\}^{\rho/k} = \sigma. \tag{11}$$

Доказательство. Полагая, что $f(z)$ — целая функция конечного порядка и нормального типа, из теоремы 2 находим ее порядок ρ. Пусть $f(z)$ имеет тип β, для которого справедлива формула (3). Покажем, что $\beta = \sigma$. Из (3) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, для которого при любом $k > k_0$

$$|c_k| < \{\rho e(\beta + \varepsilon)/k\}^{k/\rho}. \tag{12}$$

При $k > k_0$ из (5) и (12) имеем

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) \leqslant B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) \times \\ \times \left\{1 - \left(\frac{\rho e(\beta+\varepsilon)}{k+1}\right)^{2/\rho}\right\}^{-1/2} \left\{\frac{\rho e(\beta+\varepsilon)}{k+1}\right\}^{(k+1)/\rho}. \quad (13)$$

Используя (11) и (13), в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\sigma \leqslant \beta$. С другой стороны, из (3), (7) и (11) следует, что $\sigma \geqslant \beta$. Таким образом, $\sigma = \beta$.

Пусть соотношение (11) выполнено. Тогда, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} \{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda)) B^{-1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2))\}^{1/k} = 0$$

и в силу теорем 1 и 2 $f(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho \in (0, \infty)$. Полагая ее тип равным β и используя для его определения формулу (3), аналогичным образом показываем совпадение β и σ. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. пространство $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$ при $0 < p < q \leqslant \infty$; $\lambda, q \geqslant 1$. Как показано в [2], если $p \geqslant p_1$, $q \leqslant q_1$, $\lambda \leqslant \lambda_1$ и хотя бы одно неравенство строгое, то имеет место строгое включение $\mathcal{B}(p, q, \lambda) \in \mathcal{B}(p_1, q_1, \lambda_1)$, и справедливо соотношение

$$\|f\|_{p_1, q_1, \lambda_1} \leqslant 2^{1/q - 1/q_1} \{\lambda(1/p - 1/q)\}^{1/\lambda - 1/\lambda_1} \|f\|_{p, q, \lambda}.$$

Тогда для $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ получаем

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p_1, q_1, \lambda_1)) \leqslant 2^{1/q - 1/q_1} \{\lambda(1/p - 1/q)\}^{1/\lambda - 1/\lambda_1} E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)). \quad (14)$$

Теорема 4. *Для того чтобы функция $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{k\to\infty} \{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) B^{-1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))\}^{1/k} = 0. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ — целая функция. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ ее коэффициенты Тейлора $|c_k| < \varepsilon^k$ при любом натуральном $k > k_0(\varepsilon)$. Отсюда следует, что при $k > k_0$

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \leqslant \|f - t_k(f)\|_{p,q,\lambda} \leqslant B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + \\ + 1; \lambda(1/p - 1/q)) \varepsilon^{k+1}/(1-\varepsilon). \quad (16)$$

Предельное равенство (15) следует из (16) и произвольности $\varepsilon > 0$.

Пусть условие (15) выполнено и $0 < p < q < 2$; $q \geqslant 1$. Учитывая, что в данном случае $\mathcal{B}(p, q, \lambda) \subset \mathcal{B}(p, 2, \lambda)$, и используя неравенство (14), записываем

$$\left\{\frac{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))}{B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2))}\right\}^{1/k} \leqslant 2^{(1/q - 1/2)/k} \times \\ \times \left\{\frac{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda))}{B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))}\right\}^{1/k} \left\{\frac{B((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))}{B((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2))}\right\}^{1/(k\lambda)}. \quad (17)$$

Воспользовавшись представлением $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$, где $\Gamma(\cdot)$ — эйлеров интеграл, и разложением $\Gamma(\cdot)$ [7], можно показать, что последний сомножитель правой части неравенства (17) при $k \to \infty$ имеет предел, равный 1. Переходя в обеих частях соотношения (17) к пределу при $k \to \infty$ и учитывая (15), получаем соотношение (4), а это в силу теоремы 1 означает, что функция $f(z)$ целая.

Пусть теперь $0 < p \leqslant 2 < q$. Поскольку $M_2(r, f) < M_q(r, f)$, то

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \geqslant \left\{ \int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p - 1/q) - 1} \inf [M_2^\lambda (r, f - p_k) : p_k \in \mathcal{P}_k] \, dr \right\}^{1/\lambda} \geqslant$$
$$\geqslant |c_{k+1}| B^{1/\lambda} ((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)). \quad (18)$$

Из (15) и (18) имеем $\lim\limits_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = 0$, т. е. $f(z)$ — целая функция.

Если $2 \leqslant p < q$, то, полагая в неравенстве (14) $q_1 = q$, $\lambda_1 = \lambda$, $p_1 \in (0, 2)$, где p_1 — произвольное фиксированное число, а в (18) считая $p = p_1$, получаем

$$|c_{k+1}|^{1/k} \leqslant \left\{ \frac{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda))}{B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))} \right\}^{1/k} \times$$
$$\times \left\{ \frac{B((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))}{B((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p_1 - 1/q))} \right\}^{1/(k\lambda)}. \quad (19)$$

Как и в случае $0 < p < q < 2$, легко убедиться в том, что второй сомножитель правой части неравенства (19) при $k \to \infty$ имеет предел, равный 1. Поэтому, устремляя в обеих частях (19) k к ∞ и учитывая (15), получаем, что функция $f(z)$ целая. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$; $q, \lambda \geqslant 1$. Для того чтобы $f(z)$ была целой функцией конечного порядка $\rho \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \{\ln [B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)) E^{-1}(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda))]\}^{-1} k \ln k = \rho. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ — целая функция. Как и в теореме 2, полагаем ее порядок равным α и покажем, что $\alpha = \rho$. Используя (9), для $k > k_0$ имеем

$$E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \leqslant k^{-k/(\alpha+\varepsilon)} B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1;\ \lambda(1/p - 1/q)) \times$$
$$\times \{1 - (k+1)^{-1/(\alpha+\varepsilon)}\}^{-1}.$$

Преобразовав это неравенство подобно (10), получим $\alpha \geqslant \rho$. Покажем справедливость обратного неравенства. Если $0 < p < q < 2$, $q \geqslant 1$, то на основании (17), (20) и теорем 1, 2

$$\rho \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \{\ln [B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) E^{-1}(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))]\}^{-1} \times$$
$$\times k \ln k \lim_{k\to\infty} \left\{ 1 + \frac{\ln [2^{1/q - 1/2} B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)) \times B^{-1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2))]}{\ln [B^{1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) \times E^{-1}(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, 2, \lambda))]} \right\}^{-1} = \alpha.$$

Используя при $0 < p \leqslant 2 < q$ неравенства (18) и (20), получаем $\rho \geqslant \alpha$.

Если $2 \leqslant p < q$, то в силу формулы (19) и соотношений (20) и (2) имеем $\rho \geqslant \alpha$. Таким образом, $\rho = \alpha$.

Пусть условие (20) выполнено. Тогда, очевидно, справедливо предельное равенство (15) и по теореме 4 функция $f(z)$ целая конечного порядка α. Совпадение величин ρ и α показывается аналогично приведенному выше. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$; $\lambda, q \geqslant 1$. Для того чтобы функция $f(z)$ была целой конечного порядка $\rho \in (0, \infty)$ и нормального типа $\sigma \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (\rho e)^{-1} k \{E(f, \mathcal{P}_k, \mathcal{B}(p, q, \lambda)) B^{-1/\lambda}((k+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))\}^{\rho/k} = \sigma. \quad (21)$$

Доказательство. Полагая, что $f(z)$ — целая функция конечного порядка и нормального типа, из теоремы 5 находим ее порядок ρ. Как и в теореме 3, полагаем, что тип $f(z)$ равен β и для него справедлива формула (3). Покажем, что $\beta = \sigma$. Используя (12) для $k > k_0$, получаем соотношение, в общих чертах подобное (13). Как и в теореме 3, из этого соотношения и (21) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\sigma \leqslant \beta$.

При получении обратного неравенства вновь рассматриваются три случая. Например, если $0 < p < q < 2$, $q \geqslant 1$, то из (17), (21) и теоремы 3 имеем $\sigma \geqslant \beta$. Пусть $0 < p \leqslant 2 < q$. Тогда неравенство $\sigma \geqslant \beta$ следует из формул (20), (18) и (3). В случае, когда $2 \leqslant p < q$, соотношение $\sigma \geqslant \beta$ получаем из (19) и (21). Значит, $\sigma = \beta$.

В заключение отметим, что достаточность условия (21) доказывается так же, как и в теореме 3.

1. *Гварадзе М. И.* О пространствах $\mathscr{B}(p, q, \lambda)$ аналитических функций // Сообщ. АН ГССР.— 1975.— **77**, № 2.— С. 273—275.
2. *Гварадзе М. И.* Об одном классе пространств аналитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Тбилиси, 1975.— 135 с.
3. *Ониани Г. А.* О приближении аналитических функций линейными средними // Сообщ. АН ГССР.— 1977.— **87**, № 1.— С. 21—24.
4. *Reddy A. R.* A constribution to Best Approximation in the L^2 Norm // J. Approxim. Theory.— 1974.— **11**, N 1.— P. 110—117.
5. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. П.* О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР.— 1976.— **227**, № 2.— С. 280—283.
6. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем приближении в среднем аналитических функций в пространстве A_p $(|z| < 1)$ // Специальные вопросы теории функций.— 1977.— Вып. 1.— С. 84—96.
7. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции.— М. : Физматгиз, 1963.— 515 с.
8. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.— М. ; Л. : Наука, 1964.— 438 с.

Ин-т геотехн. механики АН УССР,
Днепропетровск

Получено 13.03.89