УДК 519.21

Я. И. Елейко

Предельное распределение временных средних для аддитивных функционалов, заданных на полумарковском процессе

На полумарковском процессе с непрерывным временем и произвольным фазовым пространством состояний рассмотрен аддитивный функционал ζ_t. Исследуется существование предельного распределение ζ_t/t без условия конечности средних времен пребывания полумарковского процесса в фиксированном состоянии.

На напівмарківському процесі з неперервним часом і довільним фазовим простором станів розглянуто адитивний функціонал ζ_t. Досліджується існування граничного розподілу ζ_t/t без умови скінченності середніх часів перебування напівмарківського процесу в фіксованому стані.

Пусть x_t — полумарковский процесс с непрерывным временем и произвольным пространством состояний $(X, \mathscr{B})$, со счетно порожденной σ-алгеброй. Предположим, что вложенная цепь Маркова $x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_k}, \ldots$ полумарковского процесса x_t эргодическая со стационарным распределением $\pi(\cdot)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_x^k\{A\} = \Pi(A), \quad \forall A \in \mathscr{B},$$

П-почти всюду, где τ_k — момент k-го скачка полумарковского процесса x_t,

$$P_x^k\{A\} = P\{x_{\tau_k} \in A \mid x_0 = x\}.$$

Рассмотрим ζ_t — аддитивный функционал, заданный на x_t, т. е. процессы (x_t, ζ_t), $t < \tau$, и $(x_{t+\tau}, \zeta_{t+\tau} - \zeta_t)$ условно независимы при условии $x_\tau = x$, и распределение последнего совпадает с распределением процесса $(x_t, \zeta_t - \zeta_0)$, $t > 0$. Цель настоящей статьи — найти предельное распределение ξ_t/t без условия конечности $M_x\tau$, где M_x — условное математическое ожидание при $x_0 = x$.

Теорема. *Пусть x_t — полумарковский процесс, вложенная цепь Маркова которого x_{τ_k} эргодична со стационарным распределением $\Pi(\cdot)$, и существуют медленно меняющаяся в нуле функция $L(s)$ и $\alpha \in [0, 1)$ такие, что*

$$\frac{t^\alpha}{L(1/t)}\left[1 - M_x\left(e^{-\frac{s}{t}\tau - \frac{\lambda}{t}\zeta_\tau}\right)\right] \underset{t\to\infty}{\to} a(\lambda, s, x) \tag{1}$$

П-почти всюду и в среднем по мере $\Pi(\cdot)$, $\forall s > 0$, $\lambda > 0$,

$$\int_X a(\lambda, s, x)\,\Pi(dx) > 0, \tag{2}$$

$$\frac{t^\alpha}{L(1/t)} M_x\left(e^{-\frac{\lambda}{t}\zeta_t}, \tau > t\right) \underset{t\to\infty}{\to} b(\lambda, x) \tag{3}$$

П-почти всюду,

$$\int_X b(\lambda, x)\,\Pi(dx) > 0. \tag{4}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} P_x\left\{\frac{1}{t}\zeta_t < y\right\} = G(y)$ *П-почти всюду и*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} dG(u) = \int_X \int_0^1 \Pi(dy)\,\mu_\lambda(du)\, b(\lambda(1-u), y)(1-u)^{-\alpha},$$

мера μ_λ определяется преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-su}\mu_\lambda(du) = \int_0^\infty a(\lambda, s, z)\,\Pi(dz).$$

Доказательство. Введем $\eta_t = t - \sup\limits_k\{\tau_k < t\}$ — время, прошедшее после последнего скачка. Рассмотрим совместное распределение $(\zeta_t, \eta_t/t, x_t \in B)$, $B \in \mathscr{B}$. По формуле полной вероятности имеем

$$M_x\left(e^{-\lambda\zeta_t}, \eta_t/t > v, x_t \in B\right) = \sum_{k=0}^\infty M_x\ e^{-\lambda\zeta_t}, \tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}, \eta_t/t > v, x_t \in B) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^t \int_X M_x\left(e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy\right) M_y\left(e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t-u, \eta_t/t > v, x_t \in B\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^{t-tv} \int_B M_x\left(e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy\right) M_y\left(e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t-u\right).$$

Обозначим

$$\Phi_\lambda^{k^*}(x, du, dy) = M_x\left(e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy\right),$$

$$R_\lambda(x, du, dy) = \sum_{k=0}^\infty \Phi_\lambda^{k^*}(x, du, dy).$$

Тогда в принятых обозначениях

$$M_x(e^{-\lambda\zeta_t},\ \eta_t/t>v,\ x_t\in B),$$

$$\int_0^{t(1-v)}\int_B R_\lambda(x, du, dy)\, M_y(e^{-\lambda\zeta_{t-u}},\ \tau>t-u). \tag{5}$$

Будем искать предел (5) при λ, равном λ/t_m, $t_m\to\infty$, $m\to\infty$.

Из (5) имеем

$$M_x\left(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_{t_m}},\ \eta_{t_m}/t_m>v,\ x_{t_m}\in B\right)=\int_0^{1-v}\int_B R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, dy)\times$$

$$\times M_y\left(e^{-\frac{\lambda\zeta_{t_m(1-u)}}{t_m}},\ \tau>t_m(1-u)\right). \tag{6}$$

Рассмотрим преобразование Лапласа ядра восстановления $R_\lambda(x, du, A)$ при фиксированном $A\in\mathscr{B}$. В результате получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-su}M_x(e^{-\lambda\zeta_u},\ \tau_k\in du,\ x_{\tau_k}\in A)=\sum_{k=0}^{\infty} M_x(e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}-s\tau_k}\mid x_{\tau_k}=y)\,P^k(x, dy). \tag{7}$$

Найдем теперь предел (7) при условии $\lambda=\lambda/t_m$, $s=s/t_m$, $t_m\to\infty$, $m\to\infty$. Обозначим

$$g_m(x, y)=M_x\left(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}\mid x_\tau=y\right).$$

В силу предположений $g_m(x, y)\uparrow 1$, $m\to\infty$. Используя теорему 3 **[1]**, имеем

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{A\in\mathscr{B}}\left|\varepsilon_m R^m(x, A)-\Pi(A)\right|=0$$

П-почти всюду.

Так как

$$f_m(x)=\frac{M_x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}\right)}{1-M_\Pi\left(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}\right)}$$

положительны, где $M_\Pi(\cdot)=\int_X M_x(\cdot)\,\Pi(dx)$, то $\int_X f_m(x)\,\Pi(dx)=1$, и согласно (1) функции $f_m(x)$ сходятся в среднем по мере П и П-почти всюду. Тогда последовательность $f_m(x)$ равномерно интегрируема и в силу теоремы 3 [1] $\varepsilon_m\sim M_\Pi(1-g_m(x_{\tau_0}, x_{\tau_1}))$, т. е.

$$\varepsilon_m\sim M_\Pi\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}\right)=\int_X\left[1-M_y\left(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}\right)\right]\Pi(dy).$$

Из (1) следует

$$\varepsilon_m\sim t_m^{-\alpha}L\left(\frac{1}{t_m}\right)\int_X a(\lambda, s, y)\,\Pi(dy),\quad t_m\to\infty,\quad m\to\infty,$$

и, следовательно,

$$t_m^{-\alpha}L\left(\frac{1}{t_m}\right)\int_0^{\infty}R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, B)\,e^{-su}\xrightarrow[m\to\infty]{}\Pi(B)\int_X a(\lambda, s, z)\,\Pi(dz).$$

Отсюда П-почти всюду имеет место слабая сходимость по u

$$t_m^{-\alpha}L\left(\frac{1}{t_m}\right)R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, B)\to\Pi(B)\,\mu_\lambda(du),$$

причем

$$\int_0^\infty e^{-su}\mu_\lambda(du) = \int_X a(\lambda, s, z)\,\Pi(dz).$$

Из (3) имеем

$$M_x\left(e^{-\frac{\lambda}{t}\zeta_{t(1-u)}}, \tau > t(1-u)\right) \sim t^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right) b(\lambda(1-u), x), \quad t \to \infty,$$

как только $1 - u > 0$.

Обозначим

$$\mu_m(x, du, dy) = t_m^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t_m}\right) R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, dy),$$

$$\mu_\lambda(du, dy) = \mu_\lambda(du)\,\Pi(dy),$$

$$f(u, y) = b(\lambda(1-u), y)(1-u)^{-\alpha},$$

$$f_m(u, y) = \frac{M_y\left(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_{t_m(1-u)}}, \tau > t_m(1-u)\right)}{t_m^{-\alpha} L(1/t_m)}.$$

Покажем, что

$$\int_B \int_0^{1-v} \mu_m(x, du, dy) f_m(u, y) \underset{m\to\infty}{\to} \int_B \int_0^{1-v} \mu_\lambda(x, du, dy) f(u, y)$$

при $0 < v \leqslant 1$ П-почти всюду.

Действительно,

$$\int_B \int_0^{1-v} \mu_m(x, du, dy) f(u, y) \underset{m\to\infty}{\to} \int_B \int_0^{1-v} \mu_\lambda(x, du, dy) f(u, y),$$

та: как $f(u, y)$ аппроксимируем последовательностью ступенчатых функций по y, причем при $y \in \mathcal{D}_j \supset B$, $\bigcup\limits_j \mathcal{D}_j = X$,

$$\sup_{u, y \in \mathcal{D}_j} |f(u, y)| < K_j.$$

По u аппроксимирующая последовательность будет непрерывной. Далее воспользуемся слабой сходимостью мер $\mu_m(x, du, dy)$ к $\mu_\lambda(x, du, dy)$ по du, а после этого перейдем к пределу по ступенчатым функциям.

Так как $f_m(u, y) \underset{m\to\infty}{\to} f(u, y)$ П-почти всюду и при фиксированном y $f_m(u, y)$ будет последовательностью монотонно непрерывных функций, то согласно теореме Дини сходимость будет равномерной. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $\mathcal{D}_j$: $\Pi(\mathcal{D}_j) > 1 - \varepsilon$, на котором $f_m(u, y) \rightrightarrows f(u, y)$, $y \in \mathcal{D}_j$, $u \in [0, 1 - v)$. Следовательно,

$$\left|\int_{\mathcal{D}_j} \int_0^{1-v} f_m(u, y)\,\mu_m(x, du, dy) - \int_{\mathcal{D}_j} \int_0^{1-v} f(u, y)\,\mu_m(x, du, dy)\right| \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

так как при достаточно больших m меры $\mu_m(x, [0, \infty), X) < \infty$ равномерно по $x \in X$. Тогда

$$\left|\int_{\mathcal{D}_j} \int_0^{1-v} f_m(u, y)\,\mu_m(x, du, dy) - \int_{\mathcal{D}_j} \int_0^{1-v} f(u, y)\,\mu_\lambda(x, du, dy)\right| \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Далее, в силу того, что $P_x(x_t \in \mathcal{D}) = 0$ при $\Pi(\mathcal{D}) = 0$ и η_t/t — собственная случайная величина, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{v\to+0} \lim_{n\to\infty} M_x\left(e^{-\frac{\lambda}{t}\zeta_t}, \eta_t/t > v, x_t \in \mathcal{D}_n\right) =$$

$$= \int_X \int_0^1 \Pi(dy)\, \mu_\lambda(du)\, b(\lambda(1-u), y)(1-u)^\alpha,$$

где $\bigcup_n \mathcal{D}_n = X$.

1. *Шуренков В. М.* Асимптотика потенциала обрывающейся эргодической цепи Маркова // Некоторые вопр. теории случайн. процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 122—133.

Львов. ун-т

Получено 14.02.89