УДК 512.546

Е. Г. Зеленюк, В. И. Малыхин

Двухцветная раскраска декартовых произведений

Раскрасим декартово произведение $\omega \times \omega_1$ в два цвета. Найдутся ли бесконечное подмножество $A \subset \omega$ и несчетное подмножество $B \subset \omega_1$ такие, что произведение $A \times B$ окрашено одним цветом? Этот вопрос оказался неразрешимым в ZFC.

Розфарбуємо декартовий добуток $\omega \times \omega_1$ в два кольори. Чи знайдуться нескінченна підмножина $A \subset \omega$ і незліченна підмножина $B \subset \omega_1$ такі, що добуток $A \times B$ розфарбований одним кольором? Це питання виявилось нерозв'язним в ZFC.

В классическом партиционном исчислении занимаются раскраской полных графов в несколько цветов и ищут, например, полные подграфы, окрашенные одним цветом. Как пишут Эрдеш и Радо [1], вся эта тематика идет от принципа Дедекинда: если достаточно много объектов разделить на не слишком много классов, то хотя бы один класс будет содержать сравнительно много объектов.

Возможно, первым, по-настоящему интересным результатом в этом направлении является теорема Рамсея [2, с. 85—92], которая в символической форме записывается так: $\omega \to (\omega)^n_m$ для любых n, $m \in \omega$ и утверждает, что если семейство всех n-элементных подмножеств ω разбить на m частей, то найдется бесконечное подмножество из ω такое, что все его n-элементные подмножества содержатся в какой-то одной из этих частей.

Классическое партиционное исчисление разработано хорошо, получены интересные результаты, многие из которых связаны с большими кардиналами. Например, если кардинал χ несчетен и $\chi \to (\chi)^2_2$, то χ слабо компактен и, тем самым, заведомо очень велик.

Но все же остались неразработанными некоторые простые вопросы, близкие к указанным выше, например:

Раскрасим декартово произведение $\omega \times \omega_1$ в два цвета. Найдутся ли бесконечное подмножество $A \subset \omega$ и несчетное подмножество $B \subset \omega_1$ такие, что произведение $A \times B$ окрашено одним цветом?

Отметим сразу же (доказательство ниже), что этот вопрос оказался неразрешимым в ZFC.

Некоторые аналогичные вопросы, возникшие в ходе исследования, были решены; наиболее интересные из нерешенных сформулированы ниже.

1. Введем несколько определений и обозначений, имеющих целью упростить текст.

Пусть m, n, a, b — кардиналы. Двухцветная раскраска произведения $m \times n$ — просто отображение $P : m \times n \to \{0, 1\}$. Раскраску $P : m \times n \to \{0, 1\}$ назовем (a, b)-ручной, если найдутся такие подмножества $A \subset m$, $|A| = a$, $B \subset n$, $|B| = b$, что произведение $A \times B$ окрашено одним цветом. В противном случае раскраску P назовем (a, b)-дикой.

Если каждая двухцветная раскраска произведения $m \times n$ является (a, b)-ручной, то будем писать $(m, n) \to (a, b)$; в противном случае, т. е. если найдется (a, b)-дикая двухцветная раскраска $m \times n$, будем писать $(m, n) \not\to (a, b)$.

Не стремясь к общности введенных понятий и полученных результатов, ограничимся изучением только двухцветных раскрасок декартовых произведений небольших по мощности сомножителей. В дальнейшем под произведением, раскраской понимаем декартово произведение и двухцветную раскраску соответственно.

2. Изучим вначале раскраски произведения $\omega \times \omega_1$. Пусть $P : \omega \times \omega_1 \to \{0, 1\}$ — произвольная раскраска произведения $\omega \times \omega_1$. Для $\alpha \in \omega_1$ множества $\{n \in \omega : P(n, \alpha) = 0\}$, $\{n \in \omega : P(n, \alpha) = 1\}$ обозначим через A_α^0, A_α^1 соответственно.

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств ω называется сильно расщепляющим, если для всякого $B \subset \omega$, $|B| = \aleph_0$, соотношение $|A \cap B| = |B \setminus A| = \aleph_0$ выполняется для всех $A \in \mathcal{A}$, кроме, быть может, счетного их числа [3].

Теорема 1. *Раскраска P произведения $\omega \times \omega_1$ является $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикой тогда и только тогда, когда каждое семейство $\mathcal{A}^0 = \{A_\alpha^0 : \alpha \in \omega_1\}$, $\mathcal{A}^1 = \{A_\alpha^1 : \alpha \in \omega_1\}$ сильно расщепляющее.*

Доказательство. Пусть $A \subset \omega$, $|A| = \aleph_0$. Поскольку раскраска P является $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикой, найдется $\beta^0 \in \omega_1$ такой, что $A \not\subset A_\alpha^0$ для всех $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta^0$. Если предположить, что для несчетно многих $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta^0$ $|A \setminus A_\alpha^0| < \aleph_0$, то найдется несчетно много таких α с одним и тем же конечным множеством $A \setminus A_\alpha^0$, а это приведет к противоречию с тем, что раскраска $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикая. Отсюда вытекает, что можно считать $|A \setminus A_\alpha^0| = \aleph_0$ для всех $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta^0$. По тем же причинам найдется $\beta^1 \in \omega_1$ такой, что $|A \setminus A_\alpha^1| = \aleph_0$ для всех $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta^1$. Пусть $\gamma = \max\{\beta^0, \beta^1\}$, тогда $|A \setminus A_\alpha^0| = |A \setminus A_\alpha^1| = \aleph_0$ для всех $\alpha \in \omega_1 \setminus \gamma$. Отсюда вытекает: каждое се-семейство $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{A}^1$ сильно расщепляющее. Столь же просто доказывается обратное.

Итак, существование $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикой раскраски свелось к существованию сильно расщепляющего семейства подмножеств ω. Но в [4] доказано, что в предположении $[LB + \rceil CH]$ не существует сильно расщепляющихся семейств на ω, так что справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *В предположении $[LB + \rceil CH]$ всякая раскраска произведения $\omega \times \omega_1$ является $(\aleph_0, \aleph_1)$-ручной, т. е. верно утверждение $(\aleph_0, \aleph_1) \to (\aleph_0, \aleph_1)$.*

Напомним, что LB означает высказывание, называемое леммой Буса.

LB. *Если ξ — семейство подмножеств ω, $|\xi| < \mathfrak{c}$, $|\bigcap \xi'| = \aleph_0$ для любого конечного подсемейства $\xi' \subset \xi$, то найдется бесконечное $B \subset \omega$ такое, что $|B \setminus A| < \aleph_0$ для любого $A \in \xi$.*

LB — одно из важнейших следствий аксиомы Мартина. В дальнейшем понадобится лишь вариант леммы Буса.

$LB(\aleph_1)$. *Если ξ — семейство подмножеств ω, $|\xi| = \aleph_1$, $|\bigcap \xi'| = \aleph_0$ для любого конечного подсемейства $\xi' \subset \xi$, то найдется бесконечное $B \subset \omega$ такое, что $|B \setminus A| < \aleph_0$ для любого $A \in \xi$.*

Нетрудно заметить, что $LB(\aleph_1)$ влечет $2^{\aleph_1} = \diamondsuit$.

Предложение 2. *В предположении CH существует сильно расщепляющее семейство на* ω, *следовательно, существует* $(\aleph_0, \aleph_1)$*-дикая раскраска произведения* $\omega \times \omega_1$ *и, значит,* $(\aleph_0, \aleph_1) \nrightarrow (\aleph_0, \aleph_1)$.

Сильно расщепляющее семейство $\mathcal{A}$ построим по трансфинитной индукции. Пусть $\langle B_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ — нумерация всех бесконечных подмножеств ω счетными ординалами. Предположим, что часть семейства $\mathcal{A}$ уже построена $\langle A_\alpha : \alpha < \beta \rangle$. Определим A_β так, чтобы $|A_\beta \cap B_\alpha| = |B_\alpha \setminus A_\beta| = \aleph_0$ для всех $\alpha < \beta$. Семейство $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ — искомое сильно расщепляющее семейство.

Следствием предложений 1, 2 является теорема 2.

Теорема 2. *Выполнение утверждения* $(\aleph_0, \aleph_1) \to (\aleph_0, \aleph_1)$ *не зависит от аксиом системы ZFC теории множеств.*

3. Приведем некоторые сведения о форсинге.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\omega \times m}$ частично упорядоченное множество функций φ с $\operatorname{ran} \subseteq \{0, 1\}$ и $\operatorname{dom} \varphi \subset \omega \times m$, $|\operatorname{dom} \varphi| < \aleph_0$, а частичный порядок таков: $\varphi \leqslant \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \supseteq \psi$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная исходная модель*, G — какое-нибудь $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество $\mathcal{F}_{\omega \times m}$, $\mathfrak{M}[G]$ — соответствующее генерическое расширение модели $\mathfrak{M}$. Как известно, при переходе от $\mathfrak{M}$ к $\mathfrak{M}[G]$ кардиналы и их конфинальности сохраняются, причем в $\mathfrak{M}[G]$ $\diamondsuit \geqslant m^{\aleph_0}$, если же в $\mathfrak{M}$ взято $m \leqslant \diamondsuit$, то в $\mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{M}[G]$ одна и та же кардинальная арифметика (см., например, [2, с. 119]).

Нетрудно видеть, что в $\mathfrak{M}[G]$ $\bigcup G$ — полная функция, определенная на всем произведении $\omega \times m$ и принимающая значения в $\{0, 1\}$, т. е. $\bigcup G$ раскраска произведения $\omega \times m$.

Доказательство следующего предложения несложно, но использует специфическую технику форсинга и потому опускается.

Предложение 3. *В* $\mathfrak{M}[G]$ *раскраска* $\bigcup G$ *произведения* $\omega \times m$ *является* $(\aleph_0, \aleph_1)$*-дикой, следовательно,* $(\aleph_0, m) \nrightarrow (\aleph_0, \aleph_1)$.

Предложение 4. *Утверждение о существовании* $(\aleph_0, \aleph_1)$*-дикой раскраски* $\omega \times \omega_1$ *совместно с любой кардинальной арифметикой.*

В самом деле, расширим произвольную модель посредством частично упорядоченного множества $\mathcal{F}_{\omega \times \omega_1}$, тогда кардинальная арифметика в расширенной модели такая же, как и в исходной, и в расширенной модели, согласно предложению 3, существует $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикая раскраска произведения $\omega \times \omega_1$.

Итак, при любой кардинальной арифметике соотношение $(\aleph_0, \aleph_1) \to (\aleph_0, \aleph_1)$ может не выполняться. Что касается того, может ли оно выполняться при любой кардинальной арифметике, то кроме очевидного ограничения $\diamondsuit > \aleph_1$ других ограничений нет.

Предложение 5. *Утверждение* $(\aleph_0, \aleph_1) \to (\aleph_0, \aleph_1)$ *совместно с любой кардинальной арифметикой, в которой CH не имеет места.*

В самом деле, в [5, с. 115, 128] указано, как любую модель $\mathfrak{M}$ можно генерически расширить так, что в расширенной модели $\mathfrak{M}'$ нет расщепляющих семейств мощности $\aleph_1$ (тем более сильно расщепляющих) При этом, если в $\mathfrak{M}$ $\diamondsuit \geqslant \aleph_2$, то в $\mathfrak{M}'$ та же кардинальная арифметика, что и в $\mathfrak{M}$. Но поскольку в $\mathfrak{M}'$ нет сильно расщепляющих семейств, то утверждение $(\aleph_0, \aleph_1) \to (\aleph_0, \aleph_1)$ в $\mathfrak{M}'$ выполняется (см. теорему 1).

Если в исходной модели $\mathfrak{M}$ $\aleph_2 = \diamondsuit < 2^{\aleph_1}$, то в $\mathfrak{M}'$ не выполняется и $LB(\aleph_1)$. Следовательно, справедливо предложение.

Предложение 6. *В ZFC недоказуема эквивалентность* $LB(\aleph_1)$ *и утверждения* $(\aleph_0, \aleph_1) \to (\aleph_0, \aleph_1)$.

Таким образом, последнее утверждение слабее, чем $LB(\aleph_1)$. Представляет интерес его использование в качестве самостоятельного дополнительного теоретико-множественного предположения.

4. Рассмотрим соотношение $(\aleph_0, \diamondsuit) \to (\aleph_0, \diamondsuit)$.

---

* Под моделью понимается счетная стандартная транзитивная модель системы ZFC аксиом теории множеств.

Предложение 7. *Утверждение о существовании $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикой раскраски произведения $\omega \times \diamondsuit$ совместно с любой кардинальной арифметикой.*

В самом деле, расширим произвольную модель посредством частично упорядоченного множества $\mathcal{F}_{\omega \times \diamondsuit}$ (здесь $\diamondsuit$ — значение $2^{\aleph_0}$ в исходной модели), тогда кардинальная арифметика в расширенной модели такая же, как и в исходной, и в расширенной модели, согласно предложению 3, существует $(\aleph_0, \aleph_1)$-дикая раскраска произведения $\omega \times \diamondsuit$.

Итак, при любой кардинальной арифметике соотношение $(\aleph_0, \diamondsuit) \to \to (\aleph_0, \diamondsuit)$ может не выполняться.

Предложение 8. *С любой кардинальной арифметикой, в которой* $\mathrm{cf}(\diamondsuit) > \aleph_1$, *совместно утверждение* $(\aleph_0, \diamondsuit) \to (\aleph_0, \diamondsuit)$.

Доказательству этого предложения предпошлем лемму.

Лемма. *Если на ω существует свободный ультрафильтр, имеющий базу мощности меньше* $\mathrm{cf}(\diamondsuit)$, *то утверждение* $(\aleph_0, \diamondsuit) \to (\aleph_0, \diamondsuit)$ *выполняется.*

Доказательство. Пусть ξ — свободный ультрафильтр, имеющий базу $\mathcal{B}$ мощности меньше $\mathrm{cf}(\diamondsuit)$, P — какая-нибудь раскраска произведения $\omega \times \diamondsuit$ и $\mathcal{A}^0 = \{\mathcal{A}^0_\alpha : \alpha \in \diamondsuit\}$, $\mathcal{A}^1 = \{\mathcal{A}^1_\alpha : \alpha \in \diamondsuit\}$ — семейства подмножеств ω, образованных по P так же, как в доказательстве предложения 1. Отнесем $\alpha \in \diamondsuit$ к $K_0 (K_1)$ тогда и только тогда, когда $A^0_\alpha \in \xi$ $(A^1_\alpha \in \xi)$. Поскольку $K_0 \cup K_1 = \diamondsuit$, то какое-то из этих двух множеств имеет мощность $\diamondsuit$. Пусть, например, $|K_0| = \diamondsuit$. Для всякого $B \in \mathcal{B}$ положим $\mathcal{A}(B) = \{\alpha \in K_0 : A^0_\alpha \supseteq B\}$. Тогда $K_0 = \bigcup \{\mathcal{A}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ и, поскольку $\mathrm{cf}(\diamondsuit) > > |\mathcal{B}|$, найдется $B \in \mathcal{B}$ такое, что $|\mathcal{A}(B)| = \diamondsuit$. Но это означает, что $B \times \mathcal{A}(B)$ окрашено в тот же цвет, что и $\bigcup \{A^0_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha \in \diamondsuit\}$.

Доказательство предложения 8. Как следует из конструкции Кунсна [6, с. 289], с любой кардинальной арифметикой совместно утверждение о существовании на ω свободного ультрафильтра, имеющего базу мощности $\aleph_1$. Применив лемму, завершим доказательство.

5. Приведенные выкладки все же не разрешили следующие вопросы.

Вопрос 1. Может ли существовать $(\aleph_0, \aleph_0)$-дикая раскраска произведения $\omega \times \omega_1$? Т. е. можно ли раскрасить произведение $\omega \times \omega_1$ так, чтобы любой «прямоугольник» $A \times B$ с бесконечными «сторонами» не был одноцветным? Другими словами, доказуемо ли в ZFC соотношение $(\aleph_0, \aleph_1) \to \to (\aleph_0, \aleph_0)$?

С этим вопросом тесно связан (а, возможно, и эквивалентен ему) следующий вопрос.

Вопрос 2. Может ли существовать несчетное семейство ξ подмножеств ω такое, что $|\bigcap \xi'| = \aleph_0$ для любого конечного подсемейства $\xi' \subset \subset \xi$, но $|\bigcap \xi''| < \aleph_0$ для любого бесконечного подсемейства $\xi'' \subset \xi$?

Покажем, что из отрицательного решения вопроса 2 вытекает отрицательное решение вопроса 1.

Предложение 9. *Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное бесконечное семейство подмножеств какого-нибудь бесконечного множества X, тогда возникает дилемма: а) найдется центрированное подсемейство $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ той же мощности, что и $\mathcal{A}$; или б) найдется подсемейство $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ той же мощности, что и $\mathcal{A}$ такое, что семейство $\{X \setminus A : A \in \mathcal{A}''\}$ центрировано.*

Центрированность здесь можно понимать в различных вариантах: пересечение любого конечного подсемейства непусто, бесконечно и имеет мощность не менее k, где k — какой-нибудь бесконечный кардинал, и т. п.

Доказательство. Под центрированностью будем понимать следующее: пересечение любого конечного подсемейства бесконечно. Предположим, что из $\mathcal{A}$ выделено центрированное подсемейство $\tilde{\mathcal{A}}$ мощности меньше $|\mathcal{A}|$. Если семейство $\{X \setminus A : A \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}\}$ центрировано, то доказательство вытекает из формулировки предложения. Поэтому пусть это семейство не центрировано. Тогда найдутся $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$ такие, что $|\bigcap X \setminus \setminus A_i : i < n\}| < \aleph_0$, тем самым $|X \setminus \bigcup \{A_i : i < n\}| < \aleph_0$. Отсюда

следует, что подсемейство $\tilde{\mathcal{A}}$ можно пополнить одним из элементов $A_0, \ldots$
$\ldots, A_{n-1}$ с сохранением центрированности. Доказательство предложения 9 завершено.

Рассмотрим связь между вопросами 1 и 2.

Пусть P — какая-нибудь раскраска произведения $\omega \times \omega_1$, и семейства $\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^1$ образованы по P так же, как и в доказательстве предложения 1. По предложению 9 одно из этих семейств допускает выделение несчетного центрированного подсемейства. Пусть, например, в $\mathcal{A}^0$ есть несчетное центрированное подсемейство ξ. Если вопрос 2 решается отрицательно, то найдется $\xi'' \subset \xi$, $|\xi''| \geqslant \aleph_0$ такое, что $|\bigcap \xi''| = \aleph_0$. Но отсюда вытекает, что раскраска P является $(\aleph_0, \aleph_0)$-ручной.

Вопрос 3. Продолжает ли выполняться утверждение $(\aleph_0, \aleph_1) \to \to (\aleph_0, \aleph_1)$ при добавлении одного нового коэновского подмножества ω?

Как известно, для леммы Буса ответ на подобный вопрос положителен.

В заключение заметим, что данная работа возникла благодаря алгебраической задаче [7, вопрос VII.8]: описать локально компактные абелевы группы, все не σ-компактные замкнутые подгруппы которых открыты. Этой задачей занимался А. Г. Пискунов. У него и возник вопрос о двухцветной раскраске $\omega \times \omega_1$.

1. *Erdös P., Kado R.* Combinatorial theorems on classification of subsets of a qiven set // Proc. London Math. Soc.— 1952.— **2**, N 3.— P. 417—439.
2. *Справочная* книга по математической логике, ч. 2 // Под ред. Дж. Барвайса.— М.: Наука, 1982.— 376 с.
3. *Малыхин В. И.* О топологических свойствах коэновских генерических расширений // Докл. АН СССР.— 1984.— **274**, № 3.— С. 540—544.
4. *Малыхин В. И.* Существование топологических объектов при произвольной кардинальной арифметике // Докл. АН СССР.— 1986.— **286**, № 3.— С. 542—546.
5. *Handbook* of Set-Theoretic Topology // Editors K. Kunen, I. E. Vaughan.— Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1984.— 1273 p.
6. *Kunen K.* Set Theory.— Amsterdam : North-Holland Publ. Co, 1980.— 313 p.
7. *Нерешенные* задачи топологической алгебры // Под ред. В. И. Арнаутова, А. В. Архангельского, П. И. Кирку и др.— Кишинев: Штиинца, 1985.— 40 с.

Киев. ун-т

Получено 28.04.88