УДК 517.432

С. А. Кужель

О пространствах граничных значений и правильных расширениях эрмитовых операторов

Понятие пространства граничных значений (п. г. з.) распространяется на случай эрмитовых неплотно заданных операторов с различными дефектными числами. Изучаются свойства таких п. г. з. Полученные результаты применяются для исследования правильных (в частности, диссипативных) расширений эрмитовых операторов указанного вида.

Поняття простору граничних значень (п. г. з.) поширюється на випадок ермітових нещільно заданих операторів з різними дефектними числами. Вивчаються властивості таких п. г. з. Отримані результати застосовуються при дослідженні правильних (зокрема, дисипативних) розширень ермітових операторів указаного вигляду.

В ряде работ по исследованию различных классов расширений симметрических операторов существенную роль играет понятие пространства граничных значений [1—5]. При этом соответствующие методы применимы лишь в том случае, когда рассматриваемые симметрические операторы плотно определены.

В настоящей статье предлагается отличный от принятого в указанных работах подход к определению пространства граничных значений (п. г. з.), который позволяет распространить понятие п. г. з. на случай эрмитовых (неплотно заданных) операторов с произвольными дефектными числами.

1. Будем придерживаться следующей терминологии. Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется *эрмитовым*, если $(Af, g) = (f, Ag)$ $(\forall \{f, g\} \in \mathfrak{D}_A)$. Плотно определенный эрмитов оператор называется *симметрическим* оператором.

В дальнейшем предполагаем, что рассматриваемый эрмитов оператор A удовлетворяет условию

$$\mathfrak{D}_A \vee \Delta_A = \mathfrak{H}, \quad \Delta_A = A\mathfrak{D}_A, \tag{1}$$

которое в случае симметрических операторов выполняется автоматически. При условии (1) дефектные подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ оператора A линейно независимы [6]. При фиксированном невещественном λ на линеале $\mathscr{L}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ зададим индефинитную* метрику

$$[f, g]_\lambda = 2\operatorname{Im}\lambda[(f_{\bar\lambda}, g_{\bar\lambda}) - (f_\lambda, g_\lambda)],$$

где $f = f_\lambda + f_{\bar\lambda}$, $g = g_\lambda + g_{\bar\lambda}$, $\{f_z, g_z\} \subset \mathfrak{N}_z$; $z \in \{\lambda, \bar\lambda\}$. Пусть

$$\mathscr{L}_\lambda = M_+ [+] M_- \tag{2}$$

— некоторое каноническое разложение пространства $\mathscr{L}_\lambda$, где M_+ (M_-) — максимальный равномерно положительный (отрицательный) линеал.

Определение. *Четверку $(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-, X_+, X_-)$, где $\mathscr{H}_\pm$ — гильбертовы пространства, а $X_\pm$ — линейные операторы, отображающие $\mathscr{L}_\lambda$ на $\mathscr{H}_\pm$ и удовлетворяющие условиям*

1) $(X_\pm f_\pm, X_\pm g_\pm)_{\mathscr{H}_\pm} = \pm [f_\pm, g_\pm]_\lambda \quad \forall \{f_\pm, g_\pm\} \subset M_\pm$;

2) $M_\pm = \operatorname{Ker} X_\mp$,

будем называть пространством граничных значений эрмитова оператора A.

Исходя из этого определения, нетрудно показать, что для любого эрмитова оператора A с индексом дефекта (m, n) существует п. г. з. $(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-, X_+, X_-)$ с $\dim \mathscr{H}_+ = n$, $\dim \mathscr{H}_- = m$.

Пусть, в частности, A — симметрический оператор с равными дефектными числами. Рассмотрим п. г. з. $(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-, X_+, X_-)$ оператора A, где $\mathscr{H}_+ = \mathscr{H}_- = \mathscr{H}$. Кроме того, рассмотрим операторы Γ_1 и Γ_2, определяемые условиями

$$\Gamma_1|_{\mathfrak{D}_A} = \Gamma_2|_{\mathfrak{D}_A} = 0, \quad \Gamma_1|_{\mathscr{L}_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ + X_-), \quad \Gamma_2|_{\mathscr{L}_\lambda} = \frac{i}{\sqrt{2}}(X_- - X_+).$$

Тогда тройка $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является п. г. з. оператора A в смысле [2 — 4].

2. Будем говорить, что расширение B замкнутого эрмитова оператора A определяется разложением $\mathfrak{D}_A \dot{+} N$, где N — некоторый линейно независимый с $\mathfrak{D}_A$ линеал в $\mathscr{L}_\lambda$, если $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_A \dot{+} N$ и при любом $\psi = \varphi + f_\lambda + f_{\bar\lambda}$, $\varphi \in \mathfrak{D}_A$, $f_\lambda + f_{\bar\lambda} \in N$, $B\psi = A\varphi + \bar\lambda f_\lambda + \lambda f_{\bar\lambda}$.

Определенный таким образом оператор B является правильным расширением оператора A в смысле [6], т. е. $(Af, g) = (f, Bg)$ $\forall f \in \mathfrak{D}_A$, $\forall g \in \mathfrak{D}_B$.

Пусть $(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-, X_+, X_-)$ — некоторое п. г. з. замкнутого эрмитова оператора A. Оператор K из $\mathscr{H}_+$ в $\mathscr{H}_-$ назовем *допустимым*, если линеал $\{f \in \mathscr{L}_\lambda \mid KX_+ f = X_- f\}$ линейно независим с $\mathfrak{D}_A$.

* По поводу «индефинитной» терминологии и обозначений см. [7].

Как обычно, оператор B называется диссипативным, если при любом $f \in \mathfrak{D}_B$ $\operatorname{Im}(Bf, f) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Произвольное диссипативное расширение B замкнутого эрмитова оператора A является правильным расширением оператора A и определяется разложением*

$$\mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_A \dot{+} \{f \in \mathscr{L}_\lambda \mid KX_+ f = X_- f\}, \tag{3}$$

где K — допустимое сжатие, определяемое однозначно. Обратно, всякое допустимое сжатие K из $\mathscr{H}_+$ в $\mathscr{H}_-$ посредством разложения (3) *определяет диссипативное правильное расширение B. При этом расширение B замкнутое максимальное диссипативное тогда и только тогда, когда допустимое сжатие K определено на $\mathscr{H}_+$.*

Доказательство. Рассуждая аналогично [4], можно показать, что произвольное диссипативное расширение B замкнутого эрмитова оператора A является правильным расширением оператора A, и на основании [6] получаем, что диссипативное расширение B определяется разложением $\mathfrak{D}_A \dot{+} N$, где N — неотрицательный линеал в пространстве $\mathscr{L}_\lambda$. С учетом (2) произвольный вектор $f \in N$ представим в виде $f = f_+ + f_-$, где $f_\pm \in M_\pm$ и

$$[f, f]_\lambda = [f_+, f_+]_\lambda + [f_-, f_-]_\lambda = \| X_+ f \|^2_{\mathscr{H}_+} - \| X_- f \|^2_{\mathscr{H}_-} \geqslant 0. \tag{4}$$

В силу неравенства (4) оператор $KX_+ f = X_- f$ с областью определения $\mathfrak{D}_k = X_+ N$ корректно определен, является сжатием из $\mathscr{H}_+$ в $\mathscr{H}_-$ и

$$N = \{f \in \mathscr{L}_\lambda \mid KX_+ f = X_- f\}. \tag{5}$$

Однозначность оператора K следует из единственности линеала N в разложении $\mathfrak{D}_A \dot{+} N$.

Обратно, произвольное допустимое сжатие K задает равенством (5) линейно независимый с $\mathfrak{D}_A$ линеал N, неотрицательный в силу (4), и, таким образом, разложение $\mathfrak{D}_A \dot{+} N$ определяет некоторое диссипативное расширение B.

С учетом результатов работы [8] оператор B замкнут и максимален тогда и только тогда, когда N — максимальный неотрицательный линеал в пространстве $\mathscr{L}_\lambda$, что возможно лишь в случае $\mathfrak{D}_K = X_+ N = X_+ M_+ = \mathscr{H}_+$.

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2. *Пусть B — правильное расширение оператора A с точечным спектром $\sigma_p(B)$, не покрывающим нижнюю полуплоскость. Тогда существует п. г. з. $(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-, X_+, X_-)$ оператора A, относительно которого расширение B определяется разложением* (3) *, где K — допустимый оператор из $\mathscr{H}_+$ в $\mathscr{H}_-$. Замкнутость расширения B эквивалентна замкнутости оператора K.*

3. Пусть $\tilde{A}$ — замкнутый симметрический оператор с различными, вообще говоря, дефектными числами, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_0$ — конечномерное подпространство в $\mathfrak{H}$. Определим эрмитов оператор A как сужение $\tilde{A}$ на линеал $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{\tilde{A}} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0)$ и опишем все диссипативные расширения оператора A. Отметим, что при условии равенства дефектных чисел оператора $\tilde{A}$ подобная задача другими методами решалась в [9].

Пусть R_λ — обобщенная резольвента оператора $\tilde{A}$ (см., например, [10]), P_λ — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\Delta_{(\tilde{A}-\lambda I)}$.

В дальнейшем будем предполагать, что эрмитов оператор A удовлетворяет условию (1), которое с учетом равенства $\overline{\mathfrak{D}}_A = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{N}_\lambda(A) = \{0\}. \tag{6}$$

Используя равенство

$$((A - \lambda I)\,x,\ P_\lambda R_{\bar{\lambda}} y) = (R_\lambda (A - \lambda I)\,x,\ y) = (x, y) = 0,$$

где $x \in \mathfrak{D}_A$, $y \in \mathfrak{H}_0$, несложно проверить, что

$$\mathfrak{N}_\lambda (A) = \mathfrak{N}_\lambda (\tilde{A}) \oplus P_\lambda R_{\bar{\lambda}}\, \mathfrak{H}_0. \tag{7}$$

Через $\tilde{\mathfrak{H}}_0$ обозначим линеал $\mathfrak{H}_0$ с нормой

$$\| y \|^2 = 2 \operatorname{Im} \lambda \, \| P_{\bar{\lambda}} R_\lambda y \|^2 \ \ (= 2 \operatorname{Im} \lambda \, \| P_\lambda R_{\bar{\lambda}} y \|^2), \tag{8}$$

где $y \in \mathfrak{H}_0$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

Определение нормы равенством (8) корректно, так как операторы $P_\lambda R_{\bar{\lambda}}$, $P_{\bar{\lambda}} R_\lambda$ обратимы на $\mathfrak{H}$.

Пусть $(\tilde{\mathscr{H}}_+, \tilde{\mathscr{H}}_-, \tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ — некоторое п.г.з. оператора $\tilde{A}$. Тогда, на основании теоремы 1 и соотношений (6) — (8) произвольное диссипативное расширение B оператора A определяется разложением

$$\mathfrak{D}_A \dotplus \{ f = f_1 + P_{\bar{\lambda}} R_\lambda x + P_\lambda R_{\bar{\lambda}} y \mid K (\tilde{X}_+ f_1 + x) = (\tilde{X}_- f_1 + y) \}, \tag{9}$$

где K — допустимое сжатие из $\mathscr{H}_+ = \tilde{\mathscr{H}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{H}}_0$ в $\mathscr{H}_- = \tilde{\mathscr{H}}_- \oplus \tilde{\mathfrak{H}}_0$, $f_1 \in \mathscr{L}_\lambda (\tilde{A})$, $\{x, y\} \subset \mathfrak{H}_0$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

Пример. Рассмотрим симметрический оператор $\tilde{L}_0 = -i\,(d/dx)$, действующий в $L_2(0, +\infty)$, собластью определения $\mathfrak{D}_{\tilde{L}_0} = \overset{\circ}{W}{}'_2 (0, +\infty)$. Определим эрмитов оператор L_0 как сужение $\tilde{L}_0$ на множество всех $u \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}_0}$, удовлетворяющих условию $(u, f)_{L_2} = 0$, где f — фиксированная функция из $L_2(0, +\infty)$, причем для прозвольного μ $(\operatorname{Im} \mu > 0)$ $f \,\bar{\in}\, \langle e^{i\mu x} \rangle$ (последнее условие гарантирует выполнение соотношения (1) для оператора L_0).

Пусть R^0_λ — резольвента самосопряженного в $L_2(-\infty, \infty)$ оператора $-i\,(d/dx)$; P_0 — ортопроектор из $L_2(-\infty, \infty)$ на $L_2(0, +\infty)$. В качестве п.г.з. максимального симметрического оператора $\tilde{L}_0$ рассмотрим $(\tilde{\mathscr{H}}_+, \{0\}, \tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$, где $\tilde{\mathscr{H}}_+ = \langle e^{i\lambda x} \rangle$ — пространство с нормой $\| e^{i\lambda x} \|_{\tilde{\mathscr{H}}_+} = 1$; $\tilde{X}_+$, $\tilde{X}_-$ — соответственно тождественный и нулевой операторы на $\langle e^{i\lambda x} \rangle$.

Рассматривая пространства $\mathscr{H}_- = \langle f \rangle$ с нормой $\| f \|^2_{\mathscr{H}_-} = 2 \operatorname{Im} \lambda \, \| P_0 R^0_{\bar{\lambda}} f \|^2$ и $\mathscr{H}_+ = \mathscr{H}_- \oplus \tilde{\mathscr{H}}_+$, а также используя (9), получаем описание всех диссипативных расширений оператора L_0.

В заключение отметим, что полученные результаты дают возможность определить характеристическую функцию произвольного эрмитова оператора аналогично выкладкам, приведенным в [11] для симметрических операторов с равными дефектными числами, а также провести исследование спектра правильных расширений эрмитовых операторов в терминах таких характеристических функций.

1. *Талюш М. О.* Типова структура дисипативних операторів // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1973.— № 11.— С. 993—996.
2. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки.— 1975.— **17**, вып. 1.— С. 41—48.
3. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб.— 1976.— **100**, № 2.— С. 210—216.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
5. *Сторож О. Г.* О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Мат. заметки.— 1984.— **36**, вып. 5.— С. 791—795.
6. *Кужель А. В.* Расширения эрмитовых операторов.— Киев : Вища шк., 1989.— 56 с.
7. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.— М. : Наука, 1986.— 352 с.

8. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**, № 1.— С. 186—207.
9. *Кочубей А. Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи // Мат. заметки.— 1979.— **25**, № 3.— С. 425—434.
10. *Штраус А. В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР.— 1954.— **18**, № 1.— С. 51—86.
11. *Кочубей А. Н.* О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений // Изв. АН АрмССР.— 1980.— **15**, № 3.— С. 219—232.

Киев. ун-т

Получено 24.04.89