УДК 517.983

О. Г. Сторож

Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи

Предложен способ описания максимально неотрицательных и собственных максимально аккретивных расширений неотрицательного замкнутого плотно определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Запропоновано спосіб опису максимально невід'ємних і власних максимально акретивних розширень невід'ємного замкнутого щільно визначеного оператора в гільбертовому просторі.

1. В настоящей статье предложен способ построения экстремальных, т. е. жесткого L_F и мягкого L_K расширений [1] замкнутого неотрицательного линейного оператора L_0 с областью определения $D(L_0)$, плотной в гильбертовом пространстве H. Этот способ позволяет описать все собственные, т. е. содержащиеся в L_0^*, максимально θ-аккретивные, в частности, все максимально неотрицательные расширения оператора L_0 в терминах абстрактных граничных условий (в виде, приводящем в случае дифференциальных операторов непосредственно к краевым условиям).

Напомним (см. [2] и приведенную там литературу), что тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а $y \mapsto (\Gamma_1 y, \Gamma_2 y)$ — сюръективное линейное отображение из $D(L_0^*)$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, называется пространством граничных значений (п.г.з) оператора L_0, если для всяких $y, z \in D(L_0^*)$ $(Ly \mid z) - (y \mid Lz) = (\Gamma_1 y \mid \Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y \mid \Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}$. Если, кроме того, L_0 положительно определен, $\ker \Gamma_1 = D(L_K)$, $\ker \Gamma_2 = D(L_F)$, то п.г.з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ будем называть жестким. Нетрудно доказать, что жесткое п.г.з. оператора L_0 совпадает с отвечающим жесткому (фридрихсовскому) расширению его позитивным п. г. з. в смысле [3].

Напомним также, что оператор $T : H \to H$ называется θ-аккретивным, если для всякого $y \in D(T)$ $\arg (Ty \mid y) \in [\theta - \pi/2, \theta + \pi/2]$, и максимально θ-аккретивным, если, кроме того, он не имеет в H нетривиальных θ-аккретивных расширений.

В случае, когда $\theta = 0$ ($\theta = \pi/2$, $\theta = -\pi/2$), θ-аккретивный оператор называем аккретивным (диссипативным, аккумулятивным).

2. Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — п.г.з. оператора L_0 такое, что сужение L оператора L_0^* на $\ker \Gamma_2$ неотрицательно. Для каждого вещественного λ из резольвентного множества $\rho(L)$ оператора L положим $Z_\lambda = (\Gamma_1 (L - \lambda 1_H)^{-1})^*$, $M(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda$. Известно [4], что $R(Z_\lambda) = \ker (L_0^* - \lambda 1_H)$, $\Gamma_2 Z_\lambda = 1_{\mathcal{H}}$, следовательно, $D(L_0) + \ker (L_0^* - \lambda 1_H) = \ker (\Gamma_1 - M(\lambda) \Gamma_2)$, т.е. $M(\lambda)$ является функцией Вейля [5] оператора L_0, соответствующей п. г. з. (H, Γ_1, Γ_2). Поэтому, применяя процедуру нахождения экстремальных расширений оператора L_0, предложенную в [6], можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть* $U(\lambda) = (M(\lambda) - i1_{\mathscr{H}})(M(\lambda) + i1_{\mathscr{H}})^{-1}$. *Существуют* $s - \lim_{\lambda \to -\infty} U(\lambda) = U_{-\infty}$, $s - \lim_{\lambda \to -0} U(\lambda) = U_0$ *и*

$$D(L_F) = \ker((U_{-\infty} - 1_{\mathscr{H}})\Gamma_1 + i(U_{-\infty} + 1_{\mathscr{H}})\Gamma_2),$$

$$D(L_K) = \ker((U_0 - 1_{\mathscr{H}})\Gamma_1 + i(U_0 + 1_{\mathscr{H}})\Gamma_2).$$

В частности, $L_F = L_K$ *тогда и только тогда, когда* $U_{-\infty} = U_0$.

Теорема 2. *Пусть* L_0 *и* L *положительно определены. Тогда существует*

$$s - \lim_{\lambda \to -\infty} (M(\lambda) - M(0))^{-1} = R, \tag{1}$$

а $(\mathscr{H}, \gamma_1, \gamma_2)$, *где* $\gamma_1 = \Gamma_1 - M(0)\Gamma_2$, $\gamma_2 = -R\Gamma_1 + (1_{\mathscr{H}} + RM(0))\Gamma_2$, *является жестким п.г.з. оператора* L_0, *в частности,* $D(L_F) = \ker \gamma_2$, $D(L_K) = \ker \gamma_1$.

3. Нетрудно понять, что каждое собственное максимально θ-аккретивное ($-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$) расширение оператора L_0 является сужением оператора L_0^* на множество вида $\ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2)$, где A_1, A_2 — линейные непрерывные операторы в пространстве $\mathscr{H}$. Обозначим это расширение через L_A.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и оператор* R *определен соотношением* (1). *Положим*

$$a_1 = A_1(1_{\mathscr{H}} + M(0)R) + A_2R, \quad a_2 = A_1M(0) + A_2, \tag{2}$$

L_A *максимально* θ-*аккретивен (максимально неотрицателен) тогда и только тогда, когда* $-a_1a_2^*$ $(-\theta)$-*аккретивен (неотрицателен) и* $\ker(a_1 - e^{-i\theta} \times a_2) = \{0\}$, $(\ker(a_1 - a_2) = \{0\})$.

Доказательство вытекает из теоремы 2 и результатов работ [2, 3, 7].

Замечание 1. Из (2) следует, что $\operatorname{Im}(a_1a_2^*) = \operatorname{Im}(A_1A_2^*)$. Поэтому из теоремы 3 вытекает, что L_A максимально диссипативен (максимально аккумулятивен, самосопряжен) тогда и только тогда, когда $A_1A_2^*$ диссипативен (аккумулятивен, самосопряжен) и $\ker(A_1 + iA_2) = \{0\}$ ($\ker(A_1 - iA_2) = \{0\}$, $\ker(A_1 \pm iA_2) = \{0\}$) (ср. с соответствующими результатами, изложенными в [2]).

Замечание 2. Нетрудно сформулировать критерии максимальной θ-аккретивности и максимальной неотрицательности оператора L_A в случае, когда L_0 только положителен. Действительно, если $L = L_F$, то эти критерии указаны в [5, 8] (для случая $\theta = 0$). Общий случай легко сводится к указанному, так как если $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — п.г.з. оператора L_0 и $L \geqslant 0$, то $(\mathscr{H}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$, где $2\hat{\Gamma}_1 = i(U_{-\infty} + 1_{\mathscr{H}})\Gamma_1 - (U_{-\infty} - 1_{\mathscr{H}})\Gamma_2$, $2\hat{\Gamma}_2 = (U_{-\infty} - 1_{\mathscr{H}})\Gamma_1 + i(U_{-\infty} + 1_{\mathscr{H}})\Gamma_2$ — также п.г.з. оператора L_0, причем согласно теореме 1 $D(L_F) = \ker \hat{\Gamma}_2$.

Замечание 3. Введенная в теореме 1 оператор-функция $U(\lambda)$ совпадает с характеристической функцией оператора в смысле [9]. Описание мягкого расширения в теореме 2 следует также из результатов, изложенных в [10]. Иное по форме, чем в теореме 3, описание секториальных расширений имеется в [10, 11].

4. В настоящем пункте предполагается, что L_0 положительно определен, а $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — его жесткое п. г. з. Далее пусть $B: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $\Phi: H \to \mathscr{H}$ — линейные непрерывные операторы, причем Φ компактен. Определим огераторы $\tilde{L}_B$, $\tilde{L}_0$ посредством следующих соотношений:

$$D(\tilde{L}_B) = \{y \in D(L_0^*) : \Gamma_1 y + B\Gamma_2 y = \Phi y\},$$

$$\tilde{L}_B y = L_0^* y + \Phi^*\Gamma_2 y, \ y \in D(L_B);$$

$$D(\tilde{L}_0) = D(\tilde{L}_B) \cap \ker \Gamma_2, \ \tilde{L}_0 \subset \tilde{L}_B.$$

Известно [4], что $\tilde{L}_B$ и $\tilde{L}_0$ замкнуты и плотно заданы.

Введем следующие обозначения: $\Psi = 2\,\mathrm{Re}\,(\Phi Z_0) - \Phi L^{-1}\Phi^*$, $\tilde{\Gamma}_1 = (\Gamma_1 - \Phi) + \Psi\Gamma_2$, где L — сужение оператора $\tilde{L}_0^*$ на $\ker\Gamma_2$. Учитывая, что оператор-функция Z_λ слабо стремится к нулевому оператору при $\lambda \to -\infty$, и применяя результаты [6], можно показать, что $(\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$ является жестким п. г. з. оператора $\tilde{L}_0$, в частности, L — жесткое расширение (не только оператора L_0, но и оператора $\tilde{L}_0$). Учитывая это и изложенные выше результаты, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Оператор $\tilde{L}_B$ максимально аккретивен (максимально неотрицателен) тогда и только тогда, когда $\Psi - B$ аккретивен (неотрицателен).*

Пример. Пусть L_0 — минимальный оператор, порожденный в $L_2(0, \infty)$ дифференциальным выражением $l[y] = -y'' + a^2y$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi \in L_2(0, \infty)$,

$$D(S) = \left\{y \in D(L_0^*) : y'(0) + \alpha\, y(0) = \int_0^\infty y(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx\right\},$$

$$Sy = L_0^*y + y(0)\,\varphi, \; y \in D(S),$$

а S_0 — сужение оператора S, определяемое условием $y(0) = 0$. Из изложенного в настоящем пункте следует, что жесткие расширения операторов L_0 и S_0 совпадают и S максимально аккретивен тогда и только тогда, когда

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-ax}\overline{\varphi(x)}\,dx - \int_0^\infty \psi(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx - \mathrm{Re}\,\alpha + a \geqslant 0,$$

где $\psi \in L_2(0, \infty)$, $l[\psi] = \varphi$, $\psi(0) = 0$.

1. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов // Мат. сб.— 1947.— **20**, № 3.— С. 431—495.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
3. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного оператора // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 3.— С. 168—171.
4. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов.— Киев : Наук. думка, 1983.— 212 с.
5. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. — Донецк, 1985.— 52 с. — (Препринт / АН УССР. ДонФТИ-85-9 (104)).
6. *Штраус А. В.* О расширениях полуограниченного оператора // Докл. АН СССР.— 1973.— **231**, № 3.— С. 543—546.
7. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференц. операторов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 106—131.
8. *Сторож О. Г.* Опис деяких класів розширень невід'ємного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1987.— № 10.— С. 14—16.
9. *Кочубей А. Н.* О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений // Изв. АН АрмССР.— 1980.— **15**, № 3.— С. 219—232.
10. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Докл. АН СССР.— 1988.— **298**, № 1.— С. 537—541.
11. *Арлинский Ю. М.* Позитивные пространства граничных значений и секториальные расширения неотрицательного симметрического оператора // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 8—14.

Львов. ун-т

Получено 23.02.88