

Асимптотическая теория U -статистик

1. Определение U -статистики. Начало теории U -статистик восходит к фундаментальной работе В. Гесдинга [1], в которой была доказана центральная предельная теорема. В течение последующих лет интерес к этому классу случайных величин постоянно возрастал, и в теории вероятностей сформировалось интенсивно развивающееся направление. U -статистики являются одним из универсальных объектов современной теории суммирования, который, с одной стороны, более сложен, чем суммы независимых случайных величин и векторов, а с другой — содержит в себе существенные элементы зависимости, проявляющиеся в мартингальных свойствах. Кроме того, U -статистики имеют обширную область применения в статистических задачах [1—3].

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ и имеющие распределение P . Иногда $X_1, \dots, X_n$ трактуется как выборка объема n из совокупности с распределением P .

Регулярный функционал. Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — некоторый класс вероятностных распределений на $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Обозначим $\theta: P \rightarrow \theta(P)$ — функционал, заданный на $\mathcal{P}$ и принимающий значения в R . Функционал $\theta(P)$ называется регулярным, если для него существует несмещенная оценка, т. е. $\theta(P)$ может быть представлен в виде

$$\theta(P) = \int_{\mathfrak{X}} \dots \int_{\mathfrak{X}} \Phi(x_1, \dots, x_m) P(dx_1) \dots P(dx_m) \quad (1)$$

с некоторой функцией $\Phi: (x_1, \dots, x_m) \rightarrow \Phi(x_1, \dots, x_m)$, которая называется ядром $\theta(P)$, а целое число $m \geq 1$ — степенью $\theta(P)$. Без потери общности можно предполагать, что Φ является симметрической функцией относительно своих аргументов, так как в противном случае можно ввести в рассмотрение симметрическое ядро Φ_0 по формуле $\Phi_0(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum \Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$, где суммирование осуществляется по всем $m!$ перестановкам $(i_1, \dots, i_m)$ чисел $(1, \dots, m)$.

Определение U -статистики. Для симметрического ядра $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ регулярного функционала $\theta(P)$ U -статистика определяется

так:

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \quad (2)$$

где $n \geq m$. Очевидно, что U_n является симметрической несмещенной оценкой $\theta(P)$, ибо $EU_n = \theta(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$ и $n \geq m$.

Пример 1. Выборочное среднее:

$$\theta(P) = \mu(P) = \int xP(dx), \quad \Phi(x) = x, \quad U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X}.$$

Пример 2. Выборочная дисперсия:

$$\theta(P) = \int (x - \mu)^2 P(dx),$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2,$$

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(X_i, X_j) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Пример 3. Статистика Джинни:

$$\theta(P) = E|X_1 - X_2|, \quad \Phi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \quad U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i - X_j|.$$

Пример 4. Одновыборочная статистика Вилкоксона:

$$\theta(P) = P(X_1 + X_2 \leq 0), \quad \Phi(x_1, x_2) = I(x_1 + x_2 \leq 0),$$

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} I(x_i + x_j \leq 0).$$

2 Обзор результатов. Развитие теории U -статистик с самого начала определялось влиянием классической теории суммирования независимых случайных величин: были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, оценки скорости сходимости, закон повторного логарифма и т. д. Асимптотическая теория U -статистик имеет свою специфику и качественно отличается от теории сумм независимых случайных величин. Многие асимптотические свойства U -статистик зависят от ранга r ядра Φ и моментных ограничений на ядро. Для невырожденного ядра ранга $r = 1$ асимптотика U -статистик по существу может быть сведена к асимптотике сумм случайных величин. Если ранг $r \geq 2$ (вырожденное ядро), то класс возможных предельных распределений для U -статистик расширяется и в него входят безгранично делимые законы, распределения функционалов от конечномерных и бесконечномерных гауссовских векторов, определяемых по ядру и др. Такая природа U -статистик порождает новые идеи в области предельных теорем и требует развития имеющихся методов исследования.

В настоящей работе в сжатой форме сформулированы основные идеи и результаты теории U -статистик, на базе которых развивается современная теория. В п. 3 вводится понятие ранга U -статистики (ядра Φ), от которого зависит ее асимптотика. Дано каноническое разложение (16) U -статистики, которое в 1961 г. ввел Гефдинг [4]. Непосредственно из этого представления следует, что при подходящих моментных условиях на ядро Φ невырожденная U -статистика асимптотически эквивалентна сумме независимых случайных величин. Именно это обстоятельство использовал Гефдинг [1] для доказательства асимптотической нормальности. В п. 4 приведены мартингалные свойства U -статистик. Представление U -статистики в виде суммы мартингал-разностей позволяет применять различные мартингалные предельные теоремы [5]. В случае $m = 2$ Холл [16] этим путем получил

центральную предельную теорему для U -статистик с переменным ядром Φ (т. е. $\Phi = \Phi_n$ зависит от n , причем так, что параметр n существенно влияет на асимптотику). В [7] доказана мартингальная центральная предельная теорема при любом $m \geq 1$. Ранее в [8] было показано, что U -статистика с переменным ядром возникает в вопросах исследования асимптотических свойств среднеквадратических мер качества оценки плотности распределения. На последовательности $\{U_n\}$, $n \geq m$, можно определить процессы $\xi_n(t) = U_{[nt]}$, $0 \leq t \leq 1$, со значениями в пространстве $D[0, 1]$. В [9] мартингальными методами доказаны различные функциональные предельные теоремы для $\xi_n(t)$, в том числе слабая сходимость к винеровскому процессу. В п. 5 мартингальные свойства используются для оценки моментов $E|U_n - 0|_p^p$ при всех $p \geq 1$ с помощью общих мартингальных неравенств из [10, 11]. В п. 6 приведен закон больших чисел для U -статистик. При условии $E|\Phi| < \infty$ он был доказан сначала Гейдингом [4] с помощью (16) и мартингального свойства (22) и затем Берком [12]. Данное здесь доказательство принадлежит Берку. В этом же пункте центральная предельная теорема доказана при наиболее слабых условиях на ядро Φ [13]. Вопросу о предельном распределении U -статистик при любом значении ранга посвящен п. 7. Здесь сформулирован координатный метод, суть которого состоит в представлении U -статистики U_{nr} с ядром $g_r \in L^2$ в виде (55), где случайные коэффициенты удовлетворяют (56). В результате получается предельное соотношение (51). Первоначально в [4] координатным методом было получено (57) для $m = r = 2$ (следствие 2). При любых m и r соотношение (51) координатным методом было доказано в [15, 16]. В [17] результаты работы [16] обобщены на неполные U -статистики. При этом в [15—17] предполагалось, что ядро $\Phi \in L^2$. При условии (50) теорема 3 является новой и получена в [18]. Для $r < m$ существуют примеры, которые показывают, что условия (50) выполняются, но $E\Phi^2 = \infty$. Если ядро U -статистики является переменным, то соотношение (51) может и не выполняться. Это вытекает из результатов работ [19—21]. Более того, можно показать, что для любого заданного полинома степени m от стандартной нормальной случайной величины существует U -статистика с переменным ядром, которая слабо сходится к нему. В качестве такой U -статистики достаточно взять, например (ср. с [22, 23]), линейную комбинацию элементарных симметрических многочленов степени m от независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ таких, что $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$.

При других моментных условиях симметрические многочлены обладают иными асимптотическими свойствами. Случай $m = m(n) \rightarrow \infty$ в зависимости от $n \rightarrow \infty$ изучался в [25]. Ситуация, когда $X_1, \dots, X_n$ принадлежат области притяжения устойчивого закона, рассматривалась в [25]. Исследования [26, 27] вопросы слабой сходимости симметрических полиномов общего вида от независимых случайных величин без предположения одинаковой распределенности и при различных моментных ограничениях.

Во многих задачах возникают случайные величины типа

$$T_n = \sum_{(i_1, \dots, i_m)=1}^n \Phi_{n, i_1, \dots, i_m}(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}),$$

которые можно рассматривать как обобщенный вариант U -статистики (2). Конечно вопрос о предельном распределении T_n гораздо сложнее, чем для (2). Однако когда T_n совпадает с функционалом Мизеса [28], условия те же, что и в теореме 3, за исключением моментных ограничений на ядро Φ [2, 16]. В п. 8 показано, что случайная величина η_∞ из (49), выражается в виде r -кратного стохастического интеграла Винера — Ито. Такая форма слабого предела η_∞ была найдена в [29]. Приведенное здесь доказательство дано по работе [30] и основано на формуле Ито [31]. Для функционалов Мизеса аналогичные результаты имеются в [32]. В [33] в форме стохастических интегралов доказан принцип инвариантности для симметрических статистик, содержащих в себе U -статистики. В п. 9 приведены теоремы о скорости сходимости по работе [34]. В [35] рассмотрен вопрос об асимптотическом разложении для линейной комбинации U -статистик и функционалов Мизеса.

Для U -статистик с ядром $\Phi: \mathcal{X}^m \rightarrow H$, где H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, в [36] исследованы основные вероятностные свойства: закон больших чисел, центральная предельная теорема, слабая сходимость к многократному стохастическому интегралу, скорость сходимости, закон повторного логарифма и др. Кроме того, в [36] рассмотрены U -статистики от переставляемых и слабо зависящих случайных величин.

Систематическое изложение асимптотической теории U -статистик, а также различные обобщенные варианты U -статистик (многовыборочные, с переменным ядром, от зависящих величин и др.), закон повторного логарифма, большие отклонения, скорость сходимости, асимптотические разложения, функциональные предельные теоремы для U -статистик и др., будут даны в монографии авторов настоящего обзора.

3. Каноническое разложение (представление Г е ф д и н г а) U -статистики. При условии $E|\Phi| < \infty$ определим функции

$$\begin{aligned}\Phi_c(x_1, \dots, x_c) &= E\Phi(x_1, x_2, \dots, x_c, x_{c+1}, \dots, x_m) = \\ &= E(\Phi(X_1, \dots, X_m) | X_1 = x_1, \dots, X_c = x_c), \quad c = 0, 1, \dots, m,\end{aligned}\quad (3)$$

положив $\Phi_0 = \theta(P)$, $\Phi_m = \Phi$. Отметим, что для $1 \leq c \leq m-1$, $\Phi_c(x_1, \dots, x_c) = E\Phi_{c+1}(x_1, \dots, x_c, X_{c+1})$ положим для удобства $\bar{\Phi} = \Phi - \theta(P)$ и $\bar{\Phi}_c = \Phi_c - \theta(P)$, $0 \leq c \leq m$.

Целое число r , $1 \leq r \leq m$, удовлетворяющее условиям

$$0 = \bar{\Phi}_0 = \bar{\Phi}_1 = \dots = \bar{\Phi}_{r-1}, \quad \bar{\Phi}_r \neq 0, \quad (4)$$

называется рангом U -статистики (ядра Φ). При $r = 1$ U -статистика (ядро Φ) называется невырожденной; при $r \geq 2$ — вырожденными, r — порядок вырожденности. Если $r = m$, то говорят, что U -статистика (ядро Φ) обладает свойством полной вырожденности.

Многие свойства U -статистик зависят от ранга r .

Симметрическое ядро $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ в (2) с помощью δ -меры $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$ представимо в виде

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = \int \dots \int \Phi(y_1, \dots, y_m) \prod_{j=1}^m d\delta_{x_j}(y_j). \quad (5)$$

Воспользуемся мультипликативными свойствами подынтегрального выражения в (5) следующим образом. Известно, что для любых чисел $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$ справедлива формула

$$\prod_{s=1}^m (a_s + b_s) = \prod_{s=1}^m a_s + \sum_{c=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_c \leq m} \prod_{s=1}^c b_{j_s} \prod_{s=1}^{m-c} a_{i_s}, \quad (6)$$

где $\{i_1, \dots, i_{m-c}\} = \{1, \dots, m\} - \{j_1, \dots, j_c\}$.

В (6) положим $a_s = dP(y_s)$, $b_s = d(\delta_{x_s}(y_s) - P(y_s))$. В результате с учетом обозначений (3) и свойства симметрии функций Φ_c получим формулу

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \dots, x_m) &= \theta + \sum_{c=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_c \leq m} \int \dots \int \Phi_c(y_{j_1}, \dots, y_{j_c}) \times \\ &\quad \times \prod_{s=1}^c d(\delta_{x_{j_s}}(y_{j_s}) - P(y_{j_s})).\end{aligned}\quad (7)$$

Введем обозначение для канонических функций

$$g_c(x_1, \dots, x_c) = \int \dots \int \Phi_c(y_1, \dots, y_c) \prod_{s=1}^c d(\delta_{x_s}(y_s) - P(y_s)), \quad 1 \leq c \leq m. \quad (8)$$

Из (8) очевидным образом вытекает свойство полной вырожденности

$$Eg_c(x_1, \dots, x_{c-1}, X_c) = 0 \quad (9)$$

для всех $c = 1, \dots, m$. Если воспользоваться формулой (6) при $a_{x_s} = -dP(y_s)$, $b_s = d\delta x_s(y_s)$, $s = 1, \dots, m$, то из (8) получим

$$g_c(x_1, \dots, x_c) = \sum_{d=1}^c (-1)^{c-d} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq c} \bar{\Phi}_d(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}). \quad (10)$$

Формула, «обратная» по отношению к (10), имеет вид

$$\bar{\Phi}_c(x_1, \dots, x_c) = \sum_{d=1}^c \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq c} g_d(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) \quad (11)$$

для всех $c = 1, \dots, m$.

Из (10) и (11) следует, что ранг r U -статистики можно определить условным

$$0 = g_0 = g_1 = \dots = g_{r-1}, \quad g_r \neq 0. \quad (12)$$

Подставляя (7) с учетом (8) и (12) в (2), получаем

$$U_n - \theta = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{c=r}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_c \leq m} g_c(X_{i_{j_1}}, \dots, X_{i_{j_c}}). \quad (13)$$

Приведя подобные члены в (13), получим

$$U_n - \theta = \sum_{c=r}^m \binom{n}{c}^{-1} \binom{m}{c} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_c \leq n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}). \quad (14)$$

Обозначим

$$U_{nc} = \binom{n}{c}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_c \leq n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}). \quad (15)$$

Тогда (14) имеет вид

$$U_n - \theta = \sum_{c=r}^m \binom{m}{c} U_{nc}, \quad (16)$$

и называется *каноническим разложением* (представление Геддинга) U -статистики. Функции g_c из (8) (или из (10)) со свойством полной вырожденности (9) в разложении (16) называются каноническими. В (16) r обозначает ранг U -статистики из (4). Таким образом, U -статистика (2) с ядром $E | \Phi | < \infty$ является линейной комбинацией U -статистик (15), ядра которых g_c обладают свойством полной вырожденности (9).

Для U -статистики U_{nc} в каноническом представлении Геддинга (16) можно получить выражение в виде интеграла по случайной мере. Действительно, представим U_{nc} в (15) в виде

$$U_{nc} = n^{-[c]} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_c \leq n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}), \quad (17)$$

где $n^{[c]} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-c+1)$. Введем в рассмотрение мартингальную меру

$$\gamma_n(dy_1, \dots, dy_c) = \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_c \leq n} (\delta_{x_{i_1}}(dy_1) - P(dy_1)) \dots (\delta_{x_{i_c}}(dy_c) - P(dy_c)). \quad (18)$$

Из (8), (17) и (18) получаем

$$U_{nc} = n^{-[c]} \int_{\mathfrak{X}} \dots \int_{\mathfrak{X}} g_c(y_1, \dots, y_c) \gamma_n(dy_1, \dots, dy_c). \quad (19)$$

Меру γ_n в (18), (19) будем называть перманентной случайной мерой в силу того, что в ее определении выражение справа в (18) представляет собой перманент матрицы размера $c \times n$ и с общим элементом $\delta_{X_j}(dy_i) - P(dy_i)$, $1 \leq i \leq c$, $1 \leq j \leq n$.

4. Мартингальная структура U -статистик. Положим

$$S_{nc} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_c \leq n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}). \quad (20)$$

В этих обозначениях перепишем формулу (16):

$$U_n - \theta = \sum_{c=f}^m \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} S_{nc}. \quad (21)$$

Лемма 1 (Гефдинг). Пусть $E|\Phi| < \infty$ и $\mathcal{F}_k = \sigma\{\omega: X_1, \dots, X_k\}$ — σ -алгебра, порожденная $X_1, \dots, X_k$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Тогда при каждом $c = 1, \dots, m$

$$E(S_{nc} | \mathcal{F}_k) = S_{kc}, \quad c \leq k \leq n, \quad (22)$$

т. е. стохастическая последовательность $(S_{nc}, \mathcal{F}_n)$, $n \geq c$, образует мартингал.

Доказательство. По свойству (9) имеем $E(g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}) | X_1, \dots, X_k) = 0$, если хотя бы один из индексов $i_1, \dots, i_c$ не содержится в $\{1, \dots, k\}$. Поэтому

$$E(S_{nc} | X_1, \dots, X_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_c \leq k} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}) = S_{kc}.$$

Представим U -статистику (2) в виде суммы мартингал-разностей

$$U_n - \theta = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nn}, \quad (23)$$

где $\xi_{nk} = E(U_n | X_1, \dots, X_k) - E(U_n | X_1, \dots, X_{k-1})$. Из (21) и (22) следует

$$E(U_n | X_1, \dots, X_k) = 0 + \sum_{c=f}^m \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} S_{kc}.$$

Так что

$$\xi_{nk} = \sum_{c=f}^m \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} (S_{kc} - S_{k-1,c}).$$

При $k \geq c$, $k = 1, \dots, n$; $c = 1, \dots, m$ обозначим

$$\eta_{kc} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{c-1} \leq k-1} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_{c-1}}, X_k),$$

считая по определению, что $\eta_{k1} = g_1(X_k)$. Поскольку $S_{kc} - S_{k-1,c} = \eta_{kc}$, то

$$\xi_{nk} = \sum_{c=f}^m \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} \eta_{kc}. \quad (24)$$

Лемма 2. Пусть $E|\Phi| < \infty$. Тогда U -статистика (2) представима в виде суммы (23) мартингал-разностей (24).

Можно показать, что U -статистика (2) относительно подходяще выбранного невозрастающего потока σ -алгебр $\mathcal{B}_n$, $n \geq 1$, является обращенным мартингалом. Пусть

$$\mathcal{B}_n = \sigma\{\omega: U_n, U_{n+1}, \dots\} \quad (25)$$

обозначает σ -алгебру, порожденную последовательностью U -статистик U_n , $U_{n+1}, \dots$ вида (2), где $n \geq m$. Очевидно, что $\mathcal{B}_n \supseteq \mathcal{B}_{n+1}$ для всех $n = m, m+1, \dots$ и что U_n является $\mathcal{B}_n$ -измеримой случайной величиной.

Лемма 3 (Берк). Последовательность $(U_n, \mathcal{B}_n)$, $n \geq m$, $c, \mathcal{B}_n$ из

(25). образует регулярный обращенный мартингал, причем

$$U_n = E(\Phi(X_1, \dots, X_m) | \mathcal{B}_n). \quad (26)$$

5. Оценки моментов. Дисперсия U -статистики. Пусть симметрическое ядро Φ удовлетворяет условию $E\Phi^2 < \infty$ и $\sigma_c^2 = E\tilde{\Phi}_c^2(X_1, \dots, X_c)$, $c = 0, 1, \dots, m$, считая, что $\sigma_0 = 0$. Рассмотрим два множества $(i_1, \dots, i_m)$ и $(j_1, \dots, j_m)$, состоящее из m различных целых чисел, $1 \leq i_k, j_k \leq n$, и пусть c есть целое число, равное числу совпадающих элементов среди этих двух множеств. Тогда в силу симметрии Φ и независимости $X_1, \dots, X_n$ имеем $\sigma_c^2 = E(\Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) \Phi(X_{j_1}, \dots, X_{j_m}))$. По определению дисперсия U -статистики равна

$$\sigma^2(U_n) = E(U_n - \theta)^2 = \binom{n}{m}^{-2} \sum_{c=0}^m \sum_{(c)} E(\tilde{\Phi}(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) \tilde{\Phi}(X_{j_1}, \dots, X_{j_m})),$$

где $\sum_{(c)}$ обозначает суммирование по всем индексам таким, что $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$, и выполняется в точности c равенств $i_k = j_k$, при этом каждое слагаемое равно σ_c^2 . Число таких слагаемых в $\sum_{(c)}$ равно $\binom{n}{m} \binom{m}{c} \binom{n-m}{m-c}$. Таким образом,

$$\sigma^2(U_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{c=r}^m \binom{m}{c} \binom{n-m}{m-c} \sigma_c^2. \quad (27)$$

Здесь r — ранг U -статистики.

Аналогичное представление дисперсии U -статистики можно получить через величины $\delta_c^2 = E g_c^2$. Используя

$$E(S_{nc} S_{nd}) = \begin{cases} \binom{n}{c} \delta_c^2, & c = d, \\ 0, & c \neq d, \end{cases} \quad (28)$$

с учетом (21) находим

$$\sigma^2(U_n) = \sum_{c=r}^m \binom{m}{c}^2 \binom{n}{c}^{-1} \delta_c^2. \quad (29)$$

Из (11) и (28) видим, что

$$\sigma_c^2 = \delta_c^2 + \binom{c}{1} \delta_{c-1}^2 + \dots + \binom{c}{c-1} \delta_1^2. \quad (30)$$

Отсюда по индукции (или с помощью (10) и (28)) выводим

$$\delta_c^2 = \sigma_c^2 - \binom{c}{1} \sigma_{c-1}^2 + \binom{c}{2} \sigma_{c-2}^2 - \dots + (-1)^{c-1} \binom{c}{c-1} \sigma_1^2. \quad (31)$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma^2(U_n) = r! \binom{m}{r}^2 \sigma_r^2 n^{-r} + O(n^{-r-1}). \quad (32)$$

Неравенства для моментов. Будем предполагать, что $E|\Phi|^p < \infty$, $p \geq 1$. При этом условии приведем некоторые оценки для $E|U_n - \theta|^p$, опираясь на мартингалные свойства U_n .

Л е м м а 4. Если $E|\Phi|^p < \infty$ для всех $1 \leq p \leq 2$, то

$$E|U_n - \theta|^p \leq (m-r+1)^{p-1} \sum_{c=r}^m \binom{m}{c}^p \binom{n}{c}^{-p+1} \alpha_p^{c+1} E|g_c|^p, \quad (33)$$

$$\text{где } \alpha_p = \sup_x (|x|^{-p} (|1+x|^p - 1 - px)) \leq 2^{2-p}.$$

Доказательство. Используя мартингальное неравенство из [10], для (23) имеем

$$E|U_n - \theta|^p \leq \alpha_p \sum_{k=1}^n E|\xi_{nk}|^p. \quad (34)$$

Сначала оценим $E|\xi_{nk}|^p$ с помощью (24):

$$E|\xi_{nk}|^p \leq (m-r+1)^{p-1} \sum_{c=r}^m \binom{m}{c}^p \binom{n}{c}^{-p} E|\eta_{kc}|^p. \quad (35)$$

Так как функции g_c обладают свойством (9), то последовательность $\{\eta_{kc}\}$, $k \geq 1$, также удовлетворяет мартингальному свойству. Поэтому после $(c-1)$ -кратного применения неравенства из [10] получим

$$E|\eta_{kc}|^p \leq \alpha_p^c E|g_c|^p \binom{k-1}{c-1}. \quad (36)$$

Из (34) — (36) вытекает (33).

Лемма 5. Если $E|\Phi|^p < \infty$ при $p \geq 2$, то

$$E|U_n - \theta|^p \leq (m-r+1)^{p-1} \sum_{c=r}^m \binom{m}{c}^p \binom{n}{c}^{-p+1} n^{(p-2)c/2} \gamma_p^{c+1} E|g_c|^p, \quad (37)$$

где $\gamma_p = (8(p-1) \max(1, 2^{p-3}))^p$.

Доказательство. По мартингальному неравенству из [11] при $p \geq 2$ имеем

$$E|U_n - \theta|^p \leq \gamma_p n^{(p-2)/2} \sum_{k=1}^n E|\xi_{nk}|^p. \quad (38)$$

Очевидно, что (35) справедливо и при $p \geq 2$. Поэтому следует оценить $E|\eta_{kc}|^p$. Для этого применим $(c-1)$ раз неравенство из [11] с учетом соотношения (9). В результате простых вычислений получаем

$$E|\eta_{kc}|^p \leq \gamma_p^c n^{(p-2)(c-1)/2} \binom{k-1}{c-1} E|g_c|^p,$$

что совместно с (35) и (38) приводит к (37).

6. Закон больших чисел и центральная предельная теорема.

Теорема 1. Пусть ядро Φ U -статистики в (2) удовлетворяет условию $E|\Phi(X_1, \dots, X_m)| < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$U_n \rightarrow \theta \quad (39)$$

с вероятностью 1 и в L^1 .

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_n = \sigma\{\omega: U_n, U_{n+1}, \dots\}$ — σ -алгебра из (25). Обозначим $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=m}^\infty \mathcal{B}_n$. По формуле (26) и теореме о сходимости обращенного мартингала при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$U_n \rightarrow E(\Phi | \mathcal{B}_\infty) \quad (40)$$

с вероятностью 1 и в L^1 .

Поскольку случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены, то по закону 0 или 1 σ -алгебра $\mathcal{B}_\infty = \{\emptyset, \mathcal{A}\}$ тривиальна. Следовательно, предел в (40) равен $E(\Phi | \mathcal{B}_\infty) = E\Phi(X_1, \dots, X_m) = 0$.

Предположим, что $Eg_1^2 < \infty$ и ранг $r = 1$. По центральной предельной теореме имеет место слабая сходимость

$$(n\sigma_1^2)^{-1/2} (g_1(X_1) + \dots + g_1(X_n)) \xrightarrow{d} \tau, \quad (41)$$

где τ — стандартная нормальная случайная величина.

Теорема 2. Пусть ядро Φ удовлетворяет условиям

$$E g_1^2 < \infty, \quad (42)$$

$$E |\Phi|^{4/3} < \infty \quad (43)$$

и ранг $r = 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$n^{1/2} (m\sigma_1)^{-1} (U_n - \theta) \xrightarrow{d} \tau. \quad (44)$$

Доказательство. Запишем представление (16) в виде

$$U_n - \theta = mn^{-1} \sum_{j=1}^n g_1(X_j) + \binom{m}{2} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_2(X_i, X_j) + R_n, \quad (45)$$

где $R_n = \sum_{c=3}^m \binom{m}{c} U_{nc}$, при этом $R_n \equiv 0$, если $m = 1, 2$.

Сначала покажем, что

$$\sqrt[n]{n} R_n \xrightarrow{P} 0. \quad (46)$$

В соответствии с определением величины R_n имеем

$$E |R_n|^{4/3} \leq (m-2)^{1/3} \sum_{c=3}^m \binom{m}{c}^{4/3} E |U_{nc}|^{4/3}.$$

Отсюда с учетом (33) следует

$$E |R_n|^{4/3} \leq (m-2)^{1/3} \sum_{c=3}^m \binom{m}{c}^{4/3} \binom{n}{c}^{-1/3} \alpha_{4/3}^{c+1} E |g_c|^{4/3}.$$

Таким образом, при условии (43)

$$E |\sqrt[n]{n} R_n|^{4/3} = O(n^{-1/3}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Из (47) и неравенства Чебышева получаем (46).

Далее аналогично можно оценить сумму справа в (45), содержащую $g_2(x, y)$. Это совместно с (41) приводит к (44).

7. Ортогональные разложения U -статистик (координатный метод). Рассмотрим вопрос о предельном распределении U -статистики (2). В пространстве $L^2(\mathcal{X}, P)$ выберем ортонормированный базис $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ такой, что $\varphi_0 \equiv 1$, и положим $\varphi_{i_1 \dots i_r}(x_1, \dots, x_r) = \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_r}(x_r)$. Система функций $\{\varphi_{i_1 \dots i_r}\}_{i_1 \dots i_r=0}^\infty$ образует в пространстве $L^2(\mathcal{X}', P')$ ортонормированный базис. Относительно этого базиса определим ряд Фурье функции $g_r \in L^2(\mathcal{X}', P')$:

$$g_r = \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^\infty f_r(i_1, \dots, i_r) \varphi_{i_1 \dots i_r}, \quad (48)$$

с коэффициентами Фурье $f_r(i_1, \dots, i_r) = E(g_r(X_1, \dots, X_r) \varphi_{i_1}(X_1) \dots \varphi_{i_r}(X_r))$. Положим

$$\eta_\infty = \binom{m}{r} \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^\infty f_r(i_1, \dots, i_r) \prod_{i=1}^\infty H_{\gamma(i)}(\tau_i), \quad (49)$$

где $H_k(x)$ — полином Эрмита порядка k , $\tau_1, \tau_2, \dots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, $\gamma(i)$ есть число появлений индекса i в последовательности $i_1, \dots, i_r$. Так как $g_r \in L^2$, то ряд в (49) сходится в L^2 .

Теорема 3. Пусть ядро Φ ранга $r \geq 1$ удовлетворяет при всех $c \geq r$ условиям

$$E |g_c|^{\gamma_{rc}} < \infty, \quad (50)$$

где $\gamma_{rc} = 2c/(2c - r)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$n^{r/2} (U_n - \theta) \xrightarrow{d} \eta_\infty. \quad (51)$$

Доказательство. Запишем (16) в виде

$$U_n - \theta = \binom{m}{r} U_{nr} + Q_n, \quad (52)$$

где $Q_n = \sum_{c=r+1}^n \binom{m}{c} U_{nc}$.

Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$n^{r/2} Q_n \xrightarrow{P} 0. \quad (53)$$

Тогда для справедливости (51) достаточно установить, что

$$n^{r/2} U_{nr} \xrightarrow{d} \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) \prod_{i=1}^{\infty} H_{\mathcal{N}(i)}(\tau_i). \quad (54)$$

Заметим, что в (50) $\gamma_{rr} = 2$. Так что условие (50) при $c = r$ редуцируется к условию $Eg_r^2 < \infty$.

Для доказательства (54) воспользуемся разложением (48). В определении U_{nr} заменим ядро g_r на выражение справа в (48). Тогда

$$n^{r/2} U_{nr} = \alpha_n \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) S_n(\varphi_{i_1 \dots i_r}), \quad (55)$$

где

$$S_n(\varphi_{i_1 \dots i_r}) = n^{-r/2} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_r \leq n} \varphi_{i_1}(X_{j_1}) \dots \varphi_{i_r}(X_{j_r}),$$

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)^{-1}, \quad n \geq r.$$

В (55) при $n \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$S_n(\varphi_{i_1 \dots i_r}) \xrightarrow{d} \prod_{i=1}^{\infty} H_{\mathcal{N}(i)}(\tau_i). \quad (56)$$

Так как $\alpha_n \rightarrow 1$ и ряд в (55) сходится в L^2 , то из (55), (56) следует (54), что и доказывает (51).

С л е д с т в и е 1. Пусть $r = 1$ (невыврожденное ядро). В этой ситуации предельная случайная величина η_∞ в (49) равна

$$\eta_\infty = m \sum_{i=1}^{\infty} f_1(i) H_1(\tau_i) = m \sum_{i=1}^{\infty} f_1(i) \tau_i.$$

Так как $\tau_1, \tau_2, \dots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, то данная сумма также имеет нормальное распределение с дисперсией $\sum_{i=1}^{\infty} f_1^2(i) = Eg_1^2$, что соответствует теореме 6.2.

С л е д с т в и е 2. Если $r = 2$, то

$$n U_n \xrightarrow{d} \binom{m}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\tau_i^2 - 1), \quad (57)$$

где $\{\lambda_i\}$ — собственные числа оператора

$$S: f \rightarrow E(g_2(X_1, X_2) f(X_2) | X_1 = x), \quad (58)$$

действующего из L^2 в L^2 , $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = Eg_2^2$.

8. Слабая сходимость к многократному стохастическому интегралу. Обозначим через ω гауссовскую случайную меру на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ с нулевым средним значением и ковариацией $E\omega(A)\omega(B) = P(A \cap B)$ для любых множеств $A, B \in \mathcal{A}$. Пусть $g_r \in L^2$, при этом r — ранг ядра Φ . Тогда для g_r существует r -кратный стохастический интеграл Винера—Ито

$$\mathcal{I}_r(g_r) = \int_{\mathfrak{X}} \dots \int_{\mathfrak{X}} g_r(x_1, \dots, x_r) \omega(dx_1) \dots \omega(dx_r) \quad (59)$$

относительно данной гауссовской случайной меры ω .

Выразим слабый предел η_∞ в (51) через $\mathcal{I}_r(g_r)$. Подставляя (48) в правую часть (59), получаем

$$\mathcal{I}_r(g_r) = \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) \mathcal{I}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}). \quad (60)$$

Рассмотрим стохастический интеграл

$$\mathcal{I}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}) = \int_{\mathfrak{X}} \dots \int_{\mathfrak{X}} \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_r}(x_r) \omega(dx_1) \dots \omega(dx_r). \quad (61)$$

Так как суммирование в (60) происходит по всем индексам $i_1, \dots, i_r$ от 1 до ∞ , то среди функций $\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_r}(x)$ в (61) есть совпадающие. Заметим, что значение интеграла $\mathcal{I}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r})$ не зависит от перестановки чисел $i_1, \dots, i_r$. Поэтому в последующих промежуточных вычислениях предположим для простоты, что $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$. Поскольку в ряду $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ имеются совпадения, то $i_1 = i_2 = \dots = i_{p_1} < i_{p_1+1} = i_{p_1+2} = \dots = i_{p_1+p_2} < i_{p_1+p_2+1} = \dots < i_{p_1+\dots+p_{k-1}+1} = i_{p_1+\dots+p_k}$ где $p_1 + p_2 + \dots + p_k = r, p_0 = 0$. Следовательно, (61) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}) = & \int_{\mathfrak{X}} \dots \int_{\mathfrak{X}} \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_1}(x_{p_1}) \varphi_{i_{p_1+1}}(x_{p_1+1}) \dots \varphi_{i_{p_1+p_2}}(x_{p_1+1}) \dots \\ & \dots \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{k-1}}}(x_{p_1+\dots+p_{k-1}+1}) \dots \varphi_{i_{p_1+\dots+p_k}}(x_{p_1+\dots+p_k}) \omega(dx_1) \dots \omega(dx_{p_1+\dots+p_k}). \end{aligned} \quad (62)$$

К интегралу в (62) применим формулу Ито [31]. В результате получим

$$\mathcal{I}_r(\varphi_1 \dots \varphi_r) = \prod_{s=1}^k H_{p_s} \left(\int \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{s-1}+1}}(x) \omega(dx) \right). \quad (63)$$

Очевидно, что

$$\prod_{s=1}^k H_{p_s} \left(\int \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{s-1}+1}}(x) \omega(dx) \right) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{v(i_1, \dots, i_r; j)} \left(\int \varphi_j(x) \omega(dx) \right), \quad (64)$$

где $v(i_1, \dots, i_r; j)$ — число появлений индекса j среди $i_1, \dots, i_r$ и выражение справа не зависит от перестановки индексов $i_1, \dots, i_r$. Так как

$$\tau_j = \int_{\mathfrak{X}} \varphi_j(x) \omega(dx), \quad j \geq 1,$$

то из (63) и (64) получаем

$$\mathcal{I}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{v(i_1, \dots, i_r; j)}(\tau_j). \quad (65)$$

Подставляя (65) в (60), видим, что

$$\mathcal{I}_r(g_r) = \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) \prod_{j=1}^{\infty} H_{v(i_1, \dots, i_r; j)}(\tau_j). \quad (66)$$

Сравнивая (49) и (66), получаем следующее утверждение.

Лемма 6. Для ядра Φ ранга r и $g_r \in L^2$ в соотношении (51)

$$\eta_\infty \stackrel{d}{=} \binom{m}{r} \mathcal{J}_r(g_r), \quad (67)$$

где $\mathcal{J}_r(g_r)$ — многократный стохастический интеграл из (59).

Для вычисления предельного выражения η_∞ по формуле (49) при $r \geq 3$ можно применять соотношение

$$\prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu(i_1, \dots, i_r; j)}(\tau_j) =: \tau_{i_1} \dots \tau_{i_r}, \quad (68)$$

в котором $:\tau_{i_1} \dots \tau_{i_r}:$ обозначает полином Вика; при этом

$$:\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \dots \tau_k^{p_k}: = H_{p_1}(\tau_1) H_{p_2}(\tau_2) \dots H_{p_k}(\tau_k). \quad (69)$$

9. Скорость сходимости. Невырожденное ядро. Вопрос об оценке скорости сходимости в этой ситуации равносильен задаче об оценке скорости сходимости в одномерной центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин.

Теорема 4. Пусть $r = 1$ и выполнены условия

$$E|g_1(X_1)|^3 < \infty, \quad (70)$$

$$E|\Phi(X_1, \dots, X_m)|^{5/3} < \infty. \quad (71)$$

Тогда при всех $n \geq m$ справедливо неравенство

$$\sup_x |P(\sqrt{n}(m^2\sigma_1)^{-1/2}(U_n - \theta) < x) - \Phi(x)| \leq C_\Phi n^{-1/2}, \quad (72)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, C_Φ — положительная постоянная, зависящая только от m и Φ . В частности, при $m = 2$ $C_\Phi \leq 12!(a+b)$, где $a = \sigma_1^{-3/2} E|g_1(X_1)|^3$, $b = \sigma_1^{-5/3} \times \times E|g_2(X_1, X_2)|^{5/3}$.

Доказательство см. в [34]. В основе этого доказательства лежит представление (45) и метод характеристических функций. Так как $r = 1$, то в (45) справа выделяется сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $g_1(X_1) + \dots + g_1(X_n)$. Применительно к этой сумме неравенство Эссеена при условии (70) дает оценку порядка $O(n^{-1/2})$. Условие (71) также гарантирует оценку порядка $O(n^{-1/2})$ при обработке характеристической функции, содержащей все другие слагаемые справа в (45), кроме $g_1(X_1) + \dots + g_1(X_n)$.

Вырожденное ядро. Если $r \geq 2$, то вопрос об оценке скорости сходимости редуцируется к задаче об оценке скорости сходимости в бесконечномерных пространствах [3]. Для простоты предположим, что $m = r = 2$, и приведем основной результат.

Теорема 5. Если ядро $\Phi(x, y)$ вырожденно и удовлетворяет условию

$$E|\Phi(X_1, X_2)|^3 < \infty, \quad (73)$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_x |P(nU_n < x) - P(\eta_\infty < x)| = o(n^{-1/2}). \quad (74)$$

Для доказательства сначала U -статистика (2) с помощью собственных чисел $\{\lambda_j\}$ и собственных функций $\{\varphi_j\}$ интегрального оператора (58) представляется в виде

$$(n-1)U_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (S_{nj}^2 - C_{nj}), \quad (75)$$

где $S_{nj} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varphi_j(X_i)$, $C_{nj} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \varphi_j^2(X_i)$. Из (75) видим, что (57)

имеет место при $n \rightarrow \infty$ в силу того, что $S_{nj} \xrightarrow{d} \tau_j$, $C_{nj} \rightarrow 1$ (п. н.).

Представление (75) дает возможность приспособить «характеристический вариант» метода композиций для оценки разности между допредельной характеристической функцией случайной величины $(n-1)U_n$ и предельной характеристической функцией, соответствующей выражению справа в (57).

1. *Hoefding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution // *Ann. Math. Statist.*— 1948.— 19, N 3.— P. 293—325.
2. *Serfling R. J.* Approximation theorems of mathematical statistics.— New York : Wiley, 1980.— 371 p.
3. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Асимптотический анализ распределений статистик.— Киев : Наук. думка, 1984.— 304 с.
4. *Hoefding W.* The strong law of large numbers for U -statistics // *Inst. Statist. Mimeo Ser. Univ. North Carolina.*— 1961.— N 302.— P. 1—10.
5. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.— М. : Наука, 1986.— 512 с.
6. *Hall P.* Central limit theorem for integrated square error of multivariate nonparametric density estimators // *J. Multivar. Anal.*— 1984.— 14, N 1.— P. 1—16.
7. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Мартингальная теория U -статистик.— Киев, 1984.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84. 63).
8. *Боровских Ю. В.* Проблема аппроксимации распределений U -статистик и функционалов Мизеса. I, II.— Киев, 1980.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.6; 80.7).
9. *Sen P. K.* Sequential Nonparametrics: invariance principles and statistical inference.— New York : Wiley, 1981.— 421 p.
10. *Chatterji S. D.* An L^p -convergence theorem // *Ann. Math. Statist.*— 1969.— 40, N 6.— P. 1068—1070.
11. *Dharmadhikari S. M., Fabian V., Jogdeo K.* Bounds on the moments of martingales // *Ibid.*— 1968.— 39, N 6.— P. 1719—1723.
12. *Berk R. H.* Limiting behavior of posterior distributions when the model is incorrect // *Ibid.*— 1966.— 37, N 1.— P. 51—58.
13. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Центральная предельная теорема для U -статистик в гильбертовом пространстве // Докл. АН УССР.— 1987.— № 3.— С. 16—19.
14. *Gregory G. G.* Large sample theory for U -statistics and tests of fit // *Ann. Statist.*— 1977.— 5, N 1.— P. 110—123.
15. *Rubin H., Vitale R. A.* Asymptotic distribution of symmetric statistics // *Ibid.*— 1980.— 8, N 1.— P. 165—170.
16. *Janson S.* The asymptotic distribution of degenerate U -statistics // *Uppsala Univ., Dep. Math., Techn.— Rept.*— 1979.— N 5.— P. 1—17.
17. *Janson S.* The asymptotic distribution of incomplete U -statistics // *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*— 1984.— 66, N 4.— P. 495—505.
18. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Слабая сходимость U -статистик к многократному стохастическому интегралу в гильбертовом пространстве // Докл. АН УССР.— 1987.— № 4.— С. 9—13.
19. *Weber N. C.* Central limit theorems for a class of symmetric statistics // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*— 1983.— 94, N 2.— P. 307—313.
20. *Rosen B.* A note on asymptotic normality of sums of higher dimensionally indexed random variables // *Ark. mat.*— 1969.— 8, N 1.— P. 33—43.
21. *Rosenblatt M.* Polynomials in Gaussian variables and infinite divisibility? // *Contribs Probab.*— New York: Acad. press, 1981.— P. 139—142.
22. *Гурко В. Л.* Предельные теоремы для функций случайных величин.— Киев : Вища шк., 1983.— 207 с.
23. *Mori T. F.* On a Hoefding — type problem // *Lect. Notes Statist.*— 1981.— 8.— P. 174—181.
24. *Es van Bert.* On the weak limits of elementary symmetric polynomials // *Ann. Probab.*— 1986.— 14, N 2.— P. 677—695.
25. *Avram F., Taqqu M. S.* Symmetric polynomials of random variables attracted to an infinitely divisible law // *Probab. Theor. Rel. Fields.*— 1986.— 71, N 4.— P. 491—500.
26. *Золотарев В. М.* О случайных симметрических полиномах // Вероятност. распределения и мат. статистика.— Ташкент: Фан, 1986.— С. 170—188.
27. *Сейдель Л.* К вопросу о предельных распределениях случайных симметрических функций // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— 31, № 4.— С. 671—684.
28. *Mises R.* On the asymptotic distributions of differentiable statistical functions // *Ann. Math. Statist.*— 1947.— 18, N 2.— P. 309—348.
29. *Dynkin E. B., Mandelbaum A.* Symmetric statistics, Poisson point processes and multiple Wiener integrals // *Ann. Statist.*— 1983.— 11, N 3.— P. 739—745.
30. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Предельное выражение U -статистики многократным интегралом Винера—Ито // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 2.— С. 16—18.
31. *Ito K.* Multiple Wiener integral // *J. Math. Soc. Jap.*— 1951.— 3, N 1.— P. 157—169.
32. *Филиппова А.* Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения // Теория вероятностей и ее применения.— 1962.— 7, № 1.— С. 26—60.
33. *Mandelbaum A., Taqqu M. S.* Invariance principle for symmetric statistics // *Ann. Statist.*— 1984.— 12, N 2.— P. 483—496.

34. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аппроксимация невырожденных U -статистик // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— 30, № 3.— С. 417—426.
35. *Götze F.* Expansions for von Mises functionals // *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*— 1984.— 65, N 4.— P. 599—625.
36. *Боровских Ю. В.* Теория U -статистик в гильбертовом пространстве.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.78).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.03.87