УДК 517.5

Е. С. Синайский

Аппроксимационный метод в одной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами

В работе [1] развит эффективный аппроксимационный метод решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами. Этот метод применяется также и в некоторых краевых задачах для уравнений указанного типа [2]. В настоящей статье построена процедура, приводящая к аппроксимации решения двухточечной краевой задачи многочленом, который определяется непосредственно по исходным соотношениям задачи. Изучена асимптотика погрешности приближения. Последняя имеет тот же порядок убывания, что и погрешность, доставляемая полиномами наилучшего равномерного приближения функции на отрезке.

Пусть функции $f(x)$ и $a_s(x)$ — многочлены от x степени n_1 и l_s соответственно, $a_0(x) \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$, $g(x) \in C^{(k)}$, a, $x \in [0, 1]$,

$$P(x, \xi) = -\sum_{j=0}^{k} \frac{(x-\xi)^j}{j!} e^{j}_{-1}(\xi), \qquad e^{j}_{i}(\xi) = \sum_{\nu=0}^{i-1} (-1)^{\nu} \binom{k+\nu-j-1}{\nu} \times$$

$$\times a^{(\nu)}_{j-i-\nu}(\xi), \qquad J_k(f;a) = \int\limits_a^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} f(\xi)\,d\xi, \quad k=1,2,\dots,$$

$$J_0(f;a) \equiv f(x), \quad \binom{m}{n} = \frac{1}{n!} m(m-1)\dots(m-n+1), \quad \binom{m}{0} \equiv 1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение для функции $y(x)$*

$$L[y] = f(x) - \varepsilon^{(k)}(x), \qquad L \equiv \sum_{s=0}^{k} a_s(x) \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}}, \tag{1}$$

с условиями

$$y^{(j)}(a) = \varphi_j - \gamma_j(a), \quad j=0,1,\dots,k-1, \tag{2}$$

где φ_j — произвольные числа, а величины $\gamma_j(a)$ определяются из системы

$$\sum_{i=0}^{j} e_i^j(a)\,\gamma_i(a) = \varepsilon^{(j)}(a), \quad j=0,1,\dots,k-1, \tag{3}$$

и интегральное уравнение

$$a_0(x)\,y(x) = \int\limits_a^x P(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-a)^j}{j!} \sum_{i=0}^{j} e_i^j(a)\,\varphi_i + J_k(f;a) - \varepsilon(x) \tag{4}$$

эквивалентны.

Доказательство этого утверждения выполняется способом, приведенным в [1], с привлечением тождеств

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{k}{i}\binom{j-i}{\nu-i} = (-1)^\nu \binom{k+\nu-j-1}{\nu}, \quad \nu > 0,$$

$$J_k(f-\varepsilon^{(k)};a) = J_k(f;a) - \varepsilon(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-a)^j}{j!}\,\varepsilon^{(j)}(a).$$

Отметим, что треугольная система (3) с коэффициентами по главной диагонали $e_i^i(a) = a_0(a) \neq 0$ относительно величин $\gamma_i(a)$ всегда разрешима.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$L[y] = f(x), \quad \sum_{j=1}^{k} [\alpha_{ij} y^{(j-1)}(0) + \beta_{ij} y^{(j-1)}(1)] = u_i, \quad i=1,2,\dots,k, \tag{5}$$

где α_{ij}, β_{ij}, u_i — заданные числа.

Допуская, что при любых значениях u_i и функции $f(x) \in C$ задача (5) имеет единственное решение, полагаем

$$y(x) = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s w_s(x), \quad \lambda_0 = 1, \tag{6}$$

$$L[w_s] = f(x)\,\delta_{s0}, \quad w_s^{(j-1)}(0) = \delta_{sj}, \quad s=0,1,\dots,k, \quad j=1,2,\dots,k. \tag{7}$$

Здесь λ_s — постоянные, определяемые краевыми условиями задачи (5), δ_{sj} — символ Кронекера.

Представление (6), (7) приводит задачу (5) к $k+1$ задачам Коши относительно функций $w_s(x)$.

Внеся невязки, заменим равенства (7) следующими:

$$L[w_s^*] = f(x)\,\delta_{s0} - \varepsilon_s^{(k)}(x), \quad w_s^{*(j)}(0) = w_s^{(j)}(0) - \gamma_{sj}(0), \quad s=0,1,\dots,k,$$
$$j=0,1,\dots,k-1, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_s(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_{si} T^*_{n+i}(x), \quad T^*_{n+i}(x) = \cos(n+i)\arccos(2x-1),$$

$$\sum_{i=0}^{j} e_i^j(a)\,\gamma_{si}(a) = \varepsilon_s^{(j)}(a), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \quad l = \max_{0\leqslant s\leqslant k}\{l_s + s - 1\}. \tag{9}$$

Согласно теореме 1 соотношения (8) эквивалентны уравнению вида (4) с $a = 0$. При указанной выше невязке $\varepsilon_s(x)$ его решение возможно в форме многочлена [1]

$$w_s^*(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{sj} x^j. \tag{10}$$

Числа b_{sj} и τ_{si} могут быть найдены из алгебраических систем, построенных методом неопределенных коэффициентов по соотношениям (8)—(10).

Краевые условия задачи (5), определяющие числа λ_s, выразим через значения $w_s^*(x)$. С этой целью установим связь между величинами $w_s^{*(j)}(1)$ и $w_s^{(j)}(1)$. От соотношений (7) и (8) по теореме 1 переходим к интегральным уравнениям вида (4) с $a = 0$ и $a = 1$. Из них вычитанием образуем равенство

$$\int_0^1 P(x,\xi)\,[w_s(\xi) - w_s^*(\xi)]\,d\xi =$$

$$= -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-1)^j}{j!}\left\{\varepsilon_s^{(j)}(1) - \sum_{i=0}^{j} e_i^j(1)\,[w_s^{(i)}(1) - w_s^{*(i)}(1)]\right\}. \tag{11}$$

Дифференцируя обе части (11) r раз по x и полагая $x = 1$, получаем систему

$$\sum_{i=0}^{r} e_i^r(1)\,[w_s^{(i)}(1) - w_s^{*(i)}(1)] = \varepsilon_s^{(r)}(1) + J_{sr}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{12}$$

где

$$J_{sr} = \int_0^1 \left[\frac{\partial^r P(x,\xi)}{\partial x^r}\right]_{x=1} (w_s(\xi) - w_s^*(\xi))\,d\xi. \tag{13}$$

Пусть $e_{ji} = e_i^j$ при $i \leqslant j$, $e_{ji} = 0$ при $i > j$ и $(\hat{e}_{ji})$ — матрица, обратная матрице (e_{ji}). Так как $e_{ii}(a) = a_0(a) \neq 0$, то матрица $(\hat{e}_{ji})$ существует. Относительно разностей $w_s^{(i)}(1) - w_s^{*(i)}(1)$ система (12) отличается от системы (3) только слагаемыми J_{sr} в правой части. Поэтому ее решение имеет вид

$$w_s^{(i)}(1) - w_s^{*(i)}(1) = \gamma_{si}(1) + \omega_{si}, \quad \omega_{si} = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{e}_{ij}(1)\,J_{sj}. \tag{14}$$

Согласно (5) с учетом (6), (8) и (14) имеем

$$\sum_{s=0}^{k} \lambda_s \sum_{j=1}^{k} [\alpha_{ij}(w_s^{*(j-1)}(0) + \gamma_{s,j-1}(0)) + \beta_{ij}(w_s^{*(j-1)}(1) + \gamma_{s,j-1}(1))] =$$

$$= u_i - \sum_{s=0}^{k} \lambda_s \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\omega_{s,j-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{15}$$

Считая числа λ_s теми же, что и в (6), полагаем

$$y_n^*(x) = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s w_s^*(x), \quad \varepsilon^*(x) = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s \varepsilon_s(x), \quad \gamma_j^*(a) = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s \gamma_{sj}(a), \tag{16}$$

$$b_j^* = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s b_{sj}, \quad \tau_i^* = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s \tau_{si}, \quad \omega_i = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s \omega_{si}, \quad J_j = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s J_{sj}.$$

Соотношения (8) — (10), (15) ввиду (16) приводят к равенствам

$$L[y_n^*] = f(x) - \varepsilon^{*(k)}(x), \quad \varepsilon^*(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_i^* T_{n+i}^*(x), \tag{17}$$

$$y_n^{*(j)}(0) = y^{(j)}(0) - \gamma_j^*(0), \quad y_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j^* x^j, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{k} [\alpha_{ij}(y_n^{*(j-1)}(0) + \gamma_{j-1}^*(0)) + \beta_{ij}(y_n^{*(j-1)}(1) + \gamma_{j-1}^*(1))] = u_i - \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\omega_{j-1},$$
$$i = 1, 2, \ldots, k. \tag{19}$$

Согласно теореме 1 многочлен $y_n^*(x)$ удовлетворяет уравнению вида (4) с $a = 0$, из которого при $\varepsilon^*(x) = 0$ следует уравнение для функции $y(x)$. Из этих соотношений получаем

$$y(x) - y_n^*(x) = \int_0^x \frac{P(x, \xi)}{a_0(x)} [y(\xi) - y_n^*(\xi)] \, d\xi + \frac{\varepsilon^*(x)}{a_0(x)}. \tag{20}$$

По уравнению (20) устанавливаются оценки [1]

$$\| y(x) - y_n^*(x) \|_C \leqslant \mathrm{const}\, E_n(y)_C, \quad |\tau_i^*| \leqslant \mathrm{const}\, E_n(y)_C, \quad i = 0, 1, \ldots, l+1, \tag{21}$$

где $\| \psi(x) \|_C = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\psi(x)|$, $E_n(y)_C = \min\limits_{b_j} \left\| y(x) - \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j \right\|_C$.

Равенства (19) предполагается использовать при отыскании многочлена $y_n^*(x)$ и чисел τ_i^*. Однако этому препятствуют величины ω_i, связанные с неизвестной функцией $y(x)$ ввиду (6), (13), (14), (16) соотношениями

$$\omega_i = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{e}_{ij} J_j, \quad J_j = \int_0^1 \left[\frac{\partial^j P(x, \xi)}{\partial x^j} \right]_{x=1} (y(\xi) - y_n^*(\xi)) \, d\xi. \tag{22}$$

Покажем, что без ущерба для качества приближения слагаемые с величинами ω_i в равенствах (19) можно опустить.

Лемма.

$$J_r = O(n^{-1}) E_n(y)_C, \quad n \to \infty, \quad r = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $T_j^*(x)$ — смещенный полином Чебышева, $j > 1$, $x, \xi \in [0, 1]$, $f(x, \xi)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную производную $f'_\xi(x, \xi)$. Интегрируя по частям, находим

$$I = \int_0^x T_j^*(\xi) f(x, \xi) \, d\xi = \frac{1}{4} f(x, x) \left[\frac{T_{j+1}^*(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}^*(x)}{j-1} \right] +$$
$$+ (-1)^{j+1} \frac{f(x, 0)}{2(j^2 - 1)} - \frac{1}{4} \int_0^x \left[\frac{T_{j+1}^*(\xi)}{j+1} - \frac{T_{j-1}^*(\xi)}{j-1} \right] f'_\xi(x, \xi) \, d\xi. \tag{24}$$

Отсюда видно, что при $j \to \infty$, $I = O(j^{-1})$.

Пусть $R(x, \xi)$ — резольвента уравнения (20). Тогда

$$y(x) - y_n^*(x) = \int_0^x R(x, \xi) \frac{\varepsilon^*(\xi)}{a_0(\xi)} \, d\xi + \frac{\varepsilon^*(x)}{a_0(x)}. \tag{25}$$

Обращаясь к представлению $R(x, \xi)$ через повторные ядра, нетрудно показать, что функции $R(x, \xi)$ и $R'_{\xi}(x, \xi)$ непрерывны. Так как $\varepsilon^*(x)$ есть линейная комбинация (17) полиномов $T_j^*(x)$ с коэффициентами τ_i^*, то в силу заключения об асимптотическом поведении интегралов вида (24) и оценок (21) интегральное слагаемое в (25) убывает как $O(n^{-1}) E_n(y)_C$. Такой же вывод можно сделать в отношении величин

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^j P(x, \xi)}{\partial x^j}\right]_{x=1} \frac{\varepsilon^*(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

В результате из (22) с учетом (25) следует (23). Лемма доказана.

Если в (15) последнюю сумму справа опустить, то вместо чисел λ_s решением системы будут приближенные значения $\tilde{\lambda}_s$, $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 = 1$, с погрешностью $\tilde{\lambda}_s - \lambda_s = O(n^{-1}) E_n(y)_C$ [3].

Левые части равенств (16) после замены λ_s на $\tilde{\lambda}_s$ обозначим соответственно $y_n(x)$, $\varepsilon(x)$, $\gamma_j(a)$, b_j, τ_i. В этих терминах условия (19), в которых опущены слагаемые с величинами ω_i, принимают вид

$$\sum_{j=1}^{k} [\alpha_{ij}(y_n^{(j-1)}(0) + \gamma_{j-1}(0)) + \beta_{ij}(y_n^{(j-1)}(1) + \gamma_{j-1}(1))] = u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{26}$$

где величины $\gamma_j(a)$ удовлетворяют системе (3) и

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j. \tag{27}$$

Функции $w_s^*(x)$ и числа τ_{si}^*, определенные равенствами (8), ввиду оценок, установленных в [1], при $n \to \infty$ ограничены. Поэтому

$$y_n(x) - y_n^*(x) = \sum_{s=0}^{k} (\tilde{\lambda}_s - \lambda_s) w_s^*(x) = O(n^{-1}) E_n(y)_C,$$

$$\tau_i - \tau_i^* = \sum_{s=0}^{k} (\tilde{\lambda}_s - \lambda_s) \tau_{si} = O(n^{-1}) E_n(y)_C.$$

Эти соотношения вместе с неравенствами (21) приводят к оценкам

$$\| y(x) - y_n(x) \|_C \leqslant \text{const}\, E_n(y)_C, \ \| \varepsilon(x) \|_C \leqslant \text{const}\, E_n(y)_C. \tag{28}$$

Умножая соответствующие равенства на $\tilde{\lambda}_s$ и суммируя по всем значениям $s = 0, 1, \ldots, k$, согласно (8), (9), (16) получаем

$$L[y_n] = f(x) - \varepsilon^{(k)}(x), \ \varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_i T_{n+i}^*(x). \tag{29}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Многочлены* (27), *удовлетворяющие уравнению* (29) *и краевым условиям* (26) *с учетом* (3), *приближают решение краевой задачи* (5) *с оценками* (28).

По предположению задача (5) имеет единственное решение. Так как согласно представлению (6), (7) $\lambda_s = y^{(s-1)}(0)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, то тем же свойством должна обладать и алгебраическая система (15) с неизвестными λ_s. Последнее возможно лишь при условии, что определитель этой системы отличен от нуля. Отбрасывание в системе (15) слагаемых, содержащих величины ω_{si}, изменяет значение определителя системы на величину порядка $O(n^{-1}) E_n(y)_C$. Поэтому при достаточно больших n величина измененного определителя также отлична от нуля. Это приводит к однозначному определению чисел $\tilde{\lambda}_s$. Многочлены $\omega_s^*(x)$ находятся единственным образом. Следовательно, по своему построению единствен и многочлен $y_n(x)$. Такой же вывод справедлив в отношении чисел τ_i.

Отыскание величин $\tilde{\lambda}_s$, τ_{si}, b_{sj}, γ_{sj} становится излишним, если коэффициенты b_j многочлена (27) и числа τ_i находить из алгебраической системы, построенной непосредственно по соотношениям (29), (26), (3).

Однозначная разрешимость этой системы вытекает из доказанного выше существования многочленов $y_n(x)$, удовлетворяющих указанным соотношениям, и предположения о единственности решения рассматриваемой краевой задачи.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— 38, № 4.— С. 937—967.
2. *Островецкий Л. А.* Решение по *А*-методу многоточечных краевых задач // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 94—100.
3. *Бахвалов Н. С.* Численные методы.— М. : Наука, 1973.— 632 с.

Днепропетр. горн. ин-т

Получено 15.12.86,
после доработки — 02.04.87