

Оценки устойчивости некоторых методов приближения локальными сплайнами

Пусть X — линейное нормированное пространство функций, $\mathfrak{N} \subset X$, и требуется восстановить функцию $f \in X$ некоторым методом $S : X \rightarrow \mathfrak{N}$ по неточной информации, т. е. по информации о значениях функции $\tilde{f}$, приближенно представляющей функцию f с погрешностью $\delta(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$. Многочисленные примеры подобной ситуации можно отыскать там, где в качестве источника информации о функции $f \in X$ используется некоторый измерительный прибор, а также при использовании таких средств представления исходной для метода S информации, которые допускают потерю или искажение части информации (например, в ЭВМ).

Ценность метода приближения S определяется не только погрешностью $\|f - S(f)\|_X$, но и величиной $\|S(f) - S(\tilde{f})\|_X$, которая характеризует устойчивость метода $S(f)$ по отношению к погрешностям в исходных данных.

В данной работе получены оценки устойчивости методов приближения локальными сплайнами порядка 2 и 3 в метриках пространств $L_p(I_1)$. $p = 1, 2$, и $L_\infty(I_n)$, $I_n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ (при $p = \infty$ оценки точные).

1. Пусть $\theta_m = [1 - (-1)^m]/2$, $m = 1, 2, \dots$, $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть числа α . Для натуральных N и r положим

$$\Delta_N := \{t_k : t_k = kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, h = 1/N,$$

$$\Delta'_N(r) := \{\tau_k : \tau_k = t_k - \theta_{r+1}/(2N), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

$$E_k := [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, \dots, N-1, E'_k(r) := [\tau_{k-\theta_{r+1}}, \tau_{k+\theta_r}], \tau_k \in \Delta'_N(r),$$

$$I_{r,N}([a, b]) = I_r([a, b]) := [a + \tau_{1-r}, b - \tau_{1-r}], \tau_{1-r} \in \Delta'_N(r), I_r := I_r([0, 1]).$$

Пусть $\mathfrak{M}_r$ — множество функций, определенных на I_r . Для функций $f \in \mathfrak{M}_r$ на промежутке $[0, 1]$ рассмотрим метод приближения, задаваемый оператором $S_{r,N}(f)$, который каждой функции ставит в соответствие локальный сплайн вида

$$s_r(f, t) = \sum_k \sum_{i=-n_1}^{n_1} \gamma_i^r f(\tau_{k+i}) B_{r,k}(t), \quad (1)$$

заданный на сетке Δ_N , где $B_{r,k}(t)$ — система B -сплайнов порядка r по разбиению Δ_N [1, с. 618]. Числовые коэффициенты γ_i^r в (1) выбраны из условия точности формулы $S_{r,N}(f) \sim f$ для многочленов степени r (такой выбор можно сделать, причем единственным образом; см. [2], гл. IX), $n_1 = \lfloor r/2 \rfloor$.

Наряду с $S_{r,N}(f)$ рассмотрим также оператор $\hat{S}_{r,N}(f)$, сопоставляющий функции $f \in \mathfrak{M}_{r+1}$ локальный сплайн вида

$$\hat{s}_r(f, t) = \sum_k \sum_{i=-n_2}^{n_2} \gamma_i^{r+1} \bar{f}_{k+i} B_{r,k}(t), \quad \bar{f}_j = \frac{1}{h} \int_{E'_j(r)} f(t) dt, 0 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

причем коэффициенты γ_i^{r+1} обеспечивают точность формулы $\hat{S}_{r,N}(f) \sim f$ для многочленов степени r (единственность выбора таких коэффициентов в (2) показана в [5], $n_2 = \lfloor (r+1)/2 \rfloor$).

Зафиксируем N и вместо $S_{r,N}$ и $\hat{S}_{r,N}$ будем писать S_r и $\hat{S}_r$ соответственно.

2. Обозначим $\|\delta\| := \max \{|\delta(\tau_i)| : \tau_i \in \Delta'_N(r) \cap I_r\}$,

$$\|\bar{\delta}\| := \max \left\{ |\bar{\delta}_i| : \bar{\delta}_i = \frac{1}{h} \int_{E'_i(r)} \delta(t) dt, E'_i(r) \subset I_{r+1} \right\}.$$

Пусть для функции $f \in \mathfrak{M}_r$ известно, что $\|\delta\| \leq \varepsilon$ ($\|\bar{\delta}\| \leq \varepsilon$), $\varepsilon > 0$. Требуется оценить сверху величину $\|s_r(f, t) - s_r(\tilde{f}, t)\|_p$ ($\|\hat{s}_r(f, t) - \hat{s}_r(\tilde{f}, t)\|_p$).

В силу линейности $S_r(f)$

$$\sup_{\|\delta\| \leq \varepsilon} \|s_r(f, t) - s_r(\tilde{f}, t)\|_p = \varepsilon \cdot \sup_{\|\delta/\varepsilon\| \leq 1} \|s_r(\delta/\varepsilon, t)\|_p. \quad (3)$$

Аналогично

$$\sup_{\|\bar{\delta}\| \leq \varepsilon} \|\hat{s}_r(f, t) - \hat{s}_r(\tilde{f}, t)\|_p = \varepsilon \cdot \sup_{\|\bar{\delta}/\varepsilon\| \leq 1} \|\hat{s}_r(\bar{\delta}/\varepsilon, t)\|_p. \quad (4)$$

Обозначим

$$\lambda_{r,p} := \sup_{\|g\| \leq 1} \|s_r(g, \cdot)\|_p, \quad (5)$$

$$\hat{\lambda}_{r,p} := \sup_{\|\tilde{g}\| \leq 1} \|\hat{S}_r(g, \cdot)\|_p. \quad (6)$$

Величину $\lambda_{r,p}(\hat{\lambda}_{r,p})$ можно рассматривать как константу Лебега оператора $S_r(f)$ ($\hat{S}_r(f)$), действующего из пространства функций, определенного нормой $\|\cdot\|$, в пространство L_p . Очевидно, что $\lambda_{r,p} \geq 1$, $\hat{\lambda}_{r,p} \geq 1$.

Из (3) и (4) с учетом (5) и (6) следует

$$\|s_r(f, t) - s_r(\tilde{f}, t)\|_p \leq \varepsilon \cdot \lambda_{r,p}, \quad \|\hat{s}_r(f, t) - \hat{s}_r(\tilde{f}, t)\|_p \leq \varepsilon \cdot \hat{\lambda}_{r,p}.$$

Таким образом, получение оценок устойчивости методов $S_r(f)$ и $\hat{S}_r(f)$ по норме пространства L_p сводится к вычислению соответствующих констант $\lambda_{r,p}$ и $\hat{\lambda}_{r,p}$. Значения аналогичных величин для интерполяционных сплайнов вычислены в работах [3, 4].

3. Лемма 1. При фиксированном $t \in E_k$

$$\sup_{\|g\| \leq 1} |s_r(g, t)| = \max \{s_r(g, t) : |g(\tau_i)| = 1, \tau_i \in \Delta'_N(r) \cap I_r(E_k)\}.$$

Справедливость утверждения леммы следует из линейности оператора $S_r(f)$ и локальной природы сплайна (1).

Из леммы 1 и того факта, что $\forall k = \overline{0, N-1}$

$$\exists t^* \in E_k : \sup_{\|g\| \leq 1} \|s_r(g, \cdot)\|_\infty = \sup_{\|g\| \leq 1} |s_r(g, t^*)|,$$

сразу вытекает равенство

$$\lambda_{r,\infty} = \max_{|g(\tau_i)|=1, \tau_i \in \Delta'_N(r) \cap I_r} \max_{t \in E_k} s_r(g, t), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Аналогичным образом придем к соотношению

$$\hat{\lambda}_{r,\infty} = \max_{|\tilde{g}_i|=1, E'_i(r) \subset I_{r+1}} \max_{t \in E_k} \hat{s}_r(g, t), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Теорема 1. Справедливы равенства $\lambda_{2,\infty} = 5/4$, $\lambda_{3,\infty} = 11/9$, $\lambda_{4,\infty} = 1057/768$, $\hat{\lambda}_{2,\infty} = 4/3$, $\hat{\lambda}_{3,\infty} = 2381/1536$

4. При $p = 1$ и 2 для величин $\lambda_{r,p}$, $\hat{\lambda}_{r,p}$, $r = 2, 3$, получены оценки сверху близкие к точным.

Представим (1) и (2) соответственно в виде

$$s_r(\delta, t) = \sum_i \delta(\tau_i) a_i(t), \quad (7)$$

$$\hat{s}_r(\delta, t) = \sum_i \bar{\delta}_i \hat{a}_i(t), \quad (8)$$

$$\text{где } \bar{\delta}_i = \frac{1}{h} \int_{E'_i(r)} (f(t) - \tilde{f}(t)) dt.$$

Из $|\delta(t)| \leq 1$ следует $|\bar{\delta}_i| \leq 1$, причем очевидно, что на множестве $\mathfrak{M}$, последнее неравенство неуклучаемо.

Обозначим через D_r множество функций $\delta(t) \in \mathfrak{M}$, для которых в (7) имеет место $\delta(\tau_i) a_i(t) \geq 0 \forall i \in \{i : a_i(t) \text{ знака постоянного на } E_k\}$ и $s_r(\delta, t) \geq 0 \forall t \in E_k$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Если D_r непусто, то

$$\sup_{\|g\| \leq 1} \|s_r(g, \cdot)\|_{L_1(E_p)} = \max_{\substack{\delta(t) \in D_r, \\ |\delta(\tau_i)|=1, \\ \tau_i \in \Delta'_N(r) \cap I_r(E_k)}} \int_{E_k} s_r(\delta, t) dt.$$

$$\sup_{\|g\| \leq 1} \|s_r(g, t)\|_{L_1(E_l)} = \sup_{\substack{\|\delta\| \leq 1, \\ \delta \in \hat{D}_r}} \|s_r(\delta, t)\|_{L_1(E_k)} = \sup_{\substack{\|\delta\| \leq 1, \\ \delta \in \hat{D}_r}} \int_{\hat{E}_k} s_r(\delta, t) dt,$$

откуда в силу линейности $s_r(\delta, t)$ по $\delta(\tau_i)$ получаем утверждение леммы.

Обозначим через $\hat{D}_r$ множество функций $\delta(t) \in \mathfrak{M}_{r+1}$, для которых в (8) имеет место $\hat{\delta}_i \hat{a}_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in \{i: \hat{a}_i(t) \text{ знака постоянного на } E_k\}$ и $\hat{s}_r(\delta, t) \geq 0 \quad \forall t \in E_k$. Проводя для $\hat{D}_r$ те же рассуждения, что и в лемме 2 для D_r , приходим к выводу, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Если $\hat{D}_r$ непусто, то

$$\sup_{\|\hat{g}\| \leq 1} \|\hat{s}_r(g, t)\|_{L_1(E_l)} = \max_{\substack{\delta(t) \in \hat{D}_r, \\ |\bar{\delta}_j| = 1, E_k^{(r)} \subset I_{r+1}}} \int_{E_k} s_r(\delta, t) dt.$$

Используя аналитическое представление $a_i(t)$ и $\hat{a}_i(t)$, непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении условий леммы 1 и леммы 2 при $r = 2, 3$. Применяя леммы 2 и 3 на каждом E_k , $k = \overline{0, N-1}$, и используя в качестве оценки сверху для $\sup_{\|\cdot\| \leq 1} \|\cdot\|_p$ величину

$$(N \cdot \sup_{\|\cdot\| \leq 1} \|\cdot\|_{L_p(E_k)}^p)^{1/p}, \quad p = 1, 2, \quad k = \overline{0, N-1},$$

приходим к выводу, что справедлива такая теорема.

Теорема 2. Справедливы следующие оценки для констант Лебега операторов $S_r(f)$ и $\hat{S}_r(f)$:

$$1 \leq \lambda_{2,1} \leq 11/6, \quad 1 \leq \lambda_{3,1} \leq 10/9, \quad 1 \leq \lambda_{2,2} \leq \sqrt{1127/960}, \quad 1 \leq \lambda_{3,2} \leq \sqrt{56/45},$$

$$1 \leq \hat{\lambda}_{2,1} \leq 10/9, \quad 1 \leq \hat{\lambda}_{2,2} \leq \sqrt{667/540},$$

где оценки сверху обращаются в точные равенства при $N = 1$.

5. Пусть $\mathfrak{M}_{r_1, \dots, r_n}$ — множество функций, определенных на $I_{r_1, \dots, r_n}$, где $I_{r_1, \dots, r_n} := I_{r_1, N_1} \times I_{r_2, N_2} \times \dots \times I_{r_n, N_n}$, $I_r^n := \underbrace{I_r \times \dots \times I_r}_n$.

Для функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}_{r_1, \dots, r_n}$ определим оператор $S_{r_1, \dots, r_n}(f) := S_{r_1, N_1}(S_{r_2, N_2}(\dots S_{r_n, N_n}(f)) \dots)$ полагая, что S_{r_i} действует на $f(x_1, \dots, x_n)$ как на функцию от x_i при фиксированных остальных аргументах. $S_{r_1, \dots, r_n}(f; x_1, \dots, x_n)$ есть n -мерный локальный сплайн для функции f .

Аналогичным образом определим операторы

$$\hat{S}_{r_1, \dots, r_n}(f) := \hat{S}_{r_1, N_1}(\hat{S}_{r_2, N_2}(\dots \hat{S}_{r_n, N_n}(f)) \dots)$$

и

$$S_{r_{i_1+1}, \dots, r_{i_n}}^{r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_j}}(f) := \hat{S}_{r_{i_1}, \dots, r_{i_j}}(S_{r_{i,j+1}, \dots, r_{i_n}}(f)).$$

Введем в рассмотрение норму

$$\|g\| = \max_{i_1, i_2, \dots, i_n} |g(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_n})|, \quad \tau_{i_1} \in \Delta'_{N_1}(r_1) \cap I_{r_1}, \dots, \tau_{i_n} \in \Delta'_{N_n}(r_n) \cap I_{r_n}.$$

Справедливо соотношение

$$\sup_{\|g\| \leq 1} \|S_{r_{i,j+1}, \dots, r_{i_n}}^{r_{i_1}, \dots, r_{i_j}}(g; x_1, \dots, x_n)\|_{L_\infty(I_1^n)} = \prod_{k=1}^j \hat{\lambda}_{r_{i_k}} \prod_{l=j+1}^n \lambda_{r_{i_l}}. \quad (9)$$

Действительно, оценку сверху получим, используя линейность и перестановочность одномерных операторов S_{r_i, N_i} и $\hat{S}_{r_i, N_i}$. Такую же оценку снизу получаем при рассмотрении функции $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$.

Соотношение (9) с учетом полученных выше одномерных результатов в L_∞ дает в соответствующих ситуациях точное решение задачи об устойчивости многомерных локальных сплайнов.

1. Корнейчук Н. П. О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 3.— С. 617—621.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
3. Golomb M. Approximation by periodic spline interpolations on uniform meshes // J. Approxim. Theory.— 1968.— 1.— Р. 26—65.
4. Женьякбаев А. А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r -го порядка // Мат. заметки.— 1973.— 13, № 2.— С. 217—228.
5. Хижа А. Л. О приближении дифференцируемых функций локальными сплайнами // Теория аппроксимации и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 97—104.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 13.03.87,
после доработки — 18.09.87