

*Н. Ф. Кузенный, С. С. Левищенко, Н. Н. Семко*

### **О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами**

В работе [1] введен класс метатамилтоновых групп. Группа называется метатамилтоновой, если любая ее неабелева подгруппа инвариантна. Свойства локально ступенчатых метатамилтоновых групп изучались в работах [1—6]. Группа называется локально ступенчатой, если всякая ее неединичная конечнопорожденная подгруппа имеет собственную подгруппу конечного индекса [5, 6]. Наиболее общим и существенным результатом, относящимся к метатамилтоновым группам, установленным в работах [1—6], является доказанное С. Н. Черниковым в работах [5, 6] утверждение: ком-

мутант локально ступенчатой метагамильтоновой группы является конечной примарной группой.

В работах [7, 8] дается конструктивное описание конечных нильпотентных метагамильтоновых групп и конечных нильпотентных метагамильтоновых групп класса больше 2. В частности, в работе [8] доказано, что коммутант конечной нильпотентной метагамильтоновой группы  $G$  содержится в любой ее неабелевой подгруппе и класс нильпотентности  $G$  не превышает 3.

Конструктивное описание произвольных локально ступенчатых метагамильтоновых групп приведено в работах [9—16].

В работах [5, 6] изучается класс  $\overline{TH}$ -групп, значительно обобщающий класс бесконечных метагамильтоновых групп. Бесконечная неабелева группа с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами называется  $\overline{TH}$ -группой. Основные результаты из работ [5, 6], относящиеся к  $\overline{TH}$ -группам, можно сформулировать следующим образом.

**Предложение А.** Пусть  $G$  — локально ступенчатая неметагамильтонова  $\overline{TH}$ -группа. Тогда 1)  $G$  — черниковская группа с примарной по  $p$  полной частью  $R$  ранга  $l$ ; 2) подгруппа  $R$  принадлежит любой бесконечной неабелевой подгруппе из  $G$ ; 3)  $G = C_G(R) \langle a \rangle$ ,  $C_G(R) \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle$ ,  $m \geq 1$ ; 4) элемент  $a^i$  индуцирует на подгруппе  $R$  бесконечно неприводимый автоморфизм,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ; 5) если  $l > 1$ , то  $C_G(R)$  — абелева группа; 6) если  $p \mid m$ , то  $l = p-1$ .

Понятно, что во всякой  $\overline{TH}$ -группе  $G$  с полной частью  $R$  фактор-группа  $G/R$  является метагамильтоновой группой.

Настоящая работа посвящена конструктивному описанию локально ступенчатых неметагамильтоновых  $\overline{TH}$ - $p$ -групп. С использованием конструктивного описания метагамильтоновых групп находятся необходимые и достаточные условия, выделяющие 8 конструктивно задаваемых типов неметагамильтоновых  $\overline{TH}$ - $p$ -групп (теорема 2). Заметим, что первый тип групп из теоремы 2 представляет собой расширение квазициклической группы с помощью конечной дедекиндовой группы. Этот тип групп конструктивно описан в работе [17].

**Предложение 1** [9—16]. Пусть  $G$  — локально ступенчатая метагамильтонова группа. Тогда ее коммутант  $G'$  содержится в любой неабелевой подгруппе группы  $G$ ,  $|G'| = p^n$ ,  $n \geq 1$ , и при этом выполняется одно из следующих утверждений:

1)  $G$  — нильпотентная метагамильтонова группа, причем: 1.1)  $G' = 1$ ; 1.2) при  $n > 1$  любая силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  имеет ограниченную экспоненту;

2)  $G$  — нильпотентная метагамильтонова группа вида  $G = G' \times H$ , причем: 2.1)  $G'$  — минимальный нормальный делитель группы  $G$ , совпадающий с коммутантом всякой неабелевой подгруппы из  $G$ ; 2.2)  $H = Z \langle a \rangle$ ,  $Z \leq Z(G)$ ,  $Z \cap \langle a \rangle = \langle a^n \rangle$ ,  $n > 1$ ,  $(n, p) = 1$ ; 2.3) элемент  $a^i$  индуцирует на  $G'$  неприводимый автоморфизм,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;

3)  $G$  — нильпотентная периодическая метагамильтонова группа вида  $G = G' \times H$ , причем: 3.1)  $G'$  — неабелева силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  порядка  $p^3$ , являющаяся либо группой экспоненты  $p$ , либо группой кватернионов; 3.2)  $G'$  совпадает с инвариантным множителем любой подгруппы Шмидта группы  $G$ ; 3.3)  $H = Z \langle a \rangle$ ,  $Z \leq Z(G)$ ,  $Z \cap \langle a \rangle = \langle a^n \rangle$ ,  $n > 1$ .

**Лемма 1.** Расширение  $G$  квазициклической группы  $K$  с помощью конечной дедекиндовой группы тогда и только тогда является неметагамильтоновой группой, когда  $G'$  содержит неединичные подгруппы простого порядка.

**Доказательство.** Необходимость почти очевидна. Докажем достаточность. Если  $G'$  содержит  $R$ , то ввиду предложения 1G — неметагамильтонова группа. Пусть  $G' \not\supset R$ . Тогда  $|G'| < \infty$ ,  $Z(G) \geq R$ . Отсюда следует, что  $G$  — нильпотентная группа вида  $G = P \times D$ , где  $P$  — бесконечная силовская  $p$ -подгруппа из  $G$ ,  $D$  — конечная дедекиндова  $p'$ -группа,  $|D'| \leq 2$ . Так как  $G'$  содержит неединичные подгруппы простого порядка и  $G' = P' \times D'$ , то  $|P'| \neq 1$ .

Предположим теперь, что  $G$  — метагамильтонова группа. Ввиду предложения 1  $D' = 1$ ,  $G' = P'$ ,  $|P'| > p$ . Так как  $P \geq R$  и  $G$  — нильпотентная группа, то получаем противоречие с утверждением 1 предложения 1. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Неметагамильтоновы черниковские  $\overline{TH}$ - $p$ -группы  $G$  с центральной полной частью исчерпываются группами следующих типов:*

1)  $G$  — расширение квазициклической  $p$ -подгруппы  $R$  с помощью конечной дедекиндовой  $p$ -группы и  $G'$  содержит подгруппы порядка  $p^2$ ;

2)  $G = R \times B$ ,  $R$  — квазициклическая  $p$ -подгруппа,  $B$  — конечная метагамильтонова  $p$ -группа,  $B'$  содержит подгруппы порядка  $p^2$ ;

3)  $G = RB$ ,  $R$  — центральная в  $G$  квазициклическая  $p$ -подгруппа,  $B$  — такая конечная  $p$ -подгруппа из  $G$ , что  $1 < B \cap R = B' \cap R \leq Z(G)$ ,  $B/B \cap R$  — недедекиндова метагамильтонова группа и всякая неабелева подгруппа из  $B$ , содержащая  $R \cap B$ , инвариантна в  $G$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $G$  — исследуемая группа,  $R$  — ее полная часть. Ввиду предложения 1  $R$  — квазициклическая  $p$ -подгруппа и  $G/R$  — конечная метагамильтонова  $p$ -группа.

Если  $G/R$  — дедекиндова группа, то ввиду леммы 1  $G$  — группа типа 1. Поэтому будем считать, что  $G/R$  — недедекиндова группа.

Пусть  $G = R \times D$ . Тогда  $D$  — недедекиндова метагамильтонова группа,  $G' = D'$ . Так как  $G$  — неметагамильтонова группа, то  $G' = D'$  содержит подгруппы порядка  $p^2$  и в этом случае  $G$  — группа типа 2.

Пусть  $R$  недополняема в  $G$ . Ясно, что  $G = RB$ , где  $B$  — конечная подгруппа наименьшего порядка из  $G$ , добавляющая  $R$  в  $G$ . Положим  $Y = R \cap B$ ,  $Z = Y \cap B'$ . Понятно, что  $B' = G'$ ,  $Z(G) \geq Y$ ,  $R/Z$  — центральная квазициклическая подгруппа из  $G/Z$ , имеющая тривиальное пересечение с коммутантом  $G/Z$ , совпадающим с  $B'/Z$ . Тогда ввиду предложения из [6]  $G/Z = R/Z \times B^*/Z$ , а значит,  $G = RB^*$ ,  $R \cap B^* = Z$ . Ясно, что  $|B/Y| = |B^*/Y| = |G : R|$ ,  $|B^*| = |Z| |G : R|$ ,  $|B| = |Y| |G : R|$ . В силу выбора  $B$   $|B| \leq |B^*|$ . Но тогда  $|Z| \geq |Y|$  и потому  $|Y| = |Z|$ ,  $Y = Z$ ,  $B/Z$  — недедекиндова метагамильтонова группа.

Пусть  $M$  неабелева подгруппа из  $B$ , содержащая  $Z$ . Тогда  $RM \triangleleft G$ ,  $(RM) \cap B = M \triangleleft B$ . Отсюда  $M \triangleleft G$  и, значит,  $G$  — группа типа 3. Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть  $G$  — группа одного из типов 1—3 леммы. Тогда, очевидно,  $G$  — черниковская  $p$ -группа, полная часть  $R$  которой является центральной квазициклической подгруппой из  $G$ .

Если  $G$  — группа типа 1, то ввиду леммы 1  $G$  — неметагамильтонова  $\overline{TH}$ -группа.

Пусть  $G$  — группа одного из типов 2, 3 леммы. Нетрудно заметить, что  $|G'| > p$ . Ввиду утверждения 1 предложения 1  $G$  — неметагамильтонова группа. Пусть  $H$  — бесконечная неабелева подгруппа из  $G$ . Очевидно, что  $H > R$  и  $H = RK$ , где  $K = H \cap B$ . Так как  $Z(G) \geq R$  и  $H' \neq 1$ , то  $K' \neq 1$ . Покажем, что  $K \triangleleft B$ . Понятно, что  $R \cap B \leq K$ . В группах типа 3  $K \triangleleft G$  и, значит,  $K \triangleleft B$  по условию. В группах типа 2  $K$  — неабелева подгруппа метагамильтоновой группы  $B$  и потому ввиду предложения 1  $G' = B' \leq K$ . Таким образом,  $K \triangleleft B$  и, значит, и  $K \triangleleft G$ . Из этого следует, что и  $H \triangleleft G$  и потому  $G$  —  $\overline{TH}$ -группа. Достаточность доказана. Лемма доказана.

**Определение 1.** *Группа  $G$ , порожденная семейством своих неединичных нормальных подгрупп  $C_i$ ,  $i \in I$ , называется почти прямым произведением подгрупп  $C_i$  с объединенной подгруппой  $C$ , если для любых  $i$  и  $j$  из  $I$ ,  $C_i \cap C_j = C_i \cap D_i = C \leq C_i$ , где  $D_i$  — произведение всех  $C_j$ .*

**Теорема 1.** *Конечные недедекиндовы метагамильтоновы группы  $G$ , обладающие такой собственной подгруппой  $X$ , что всякая подгруппа  $N$  из  $G$ , не содержащаяся в  $X$ , инвариантна в  $G$  и  $G/N$  — дедекиндова группа, исчерпываются прямыми произведениями  $G = P \times D$ , где  $D$  — конечная холловская абелева подгруппа из  $G$ , принадлежащая  $X$ ,  $P$  — конечная си-*

ловская  $p$ -подгруппа, удовлетворяющая одному и только одному из следующих условий:

1)  $P = \langle a \rangle \times B$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $P' = \langle a^{p^k} \rangle$ ,  $P \cap X = \langle a^{p^m} \rangle \times B$ ,  $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k > 0$ ,  $p^k > 2$ ,  $B$  — абелева группа экспоненты  $p^\beta$ ,  $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$ ,  $B = \langle b \rangle Z$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $Z(G) \geq Z$ ;

2)  $P = \langle a \rangle \times B$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $P' = \langle a^{p^k} \rangle$ ,  $P \cap X = \langle a^{p^m} \rangle \times B$ ,  $\alpha > k \geq \alpha - k > m > 0$ ,  $B$  — абелева группа экспоненты  $p^\beta$ ,  $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k > 1$ ,  $B = \langle b \rangle Z$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $Z(G) \geq Z$ , экспонента  $Z$  не превышает  $p^{2k-\alpha+1}$ ;

3)  $P = \langle a \rangle Y$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $P' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle = Y' = \langle a \rangle \cap Y$ ,  $P \cap X = \langle a^{p^m} \rangle Y$ ,  $\alpha > m > 0$ ,  $p^{\alpha-m} > 2$ ,  $Y$  — почти прямое произведение подгрупп  $Y' \times \langle b_i \rangle$  с объединенной подгруппой  $Y'$ ,  $i \in I$ ,  $|I| > 1$ ,  $|b_i| = p^{\beta_i}$ ,  $\alpha - m \geq \beta_i > 0$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $G$  — исследуемая группа,  $X$  — ее подгруппа, удовлетворяющая условиям теоремы. Очевидно, что  $G$  совпадает с объединением смежных классов  $Xg_l$ ,  $l \in L$ ,  $|L| > 1$ . Отметим, что только для одного индекса  $l$ , например  $l = 0$ ,  $g_0 \in X$ , для всех остальных  $l$   $g_l \notin X$ . По условию теоремы для  $l \neq 0$   $\langle g_l \rangle \triangleleft G$  и  $G/\langle g_l \rangle$  — дедекиндова группа. Этому же условию удовлетворяет любая подгруппа вида  $\langle xg_l \rangle$  ( $l \neq 0$ ), где  $x \in X$ . Из этого следует, что группа  $G$  порождается своими инвариантными циклическими подгруппами вида  $\langle xg_l \rangle$ , где  $x \in X$ ,  $l \neq 0$ . Ввиду леммы 2 из [18]  $G'$  — неединичная центральная периодическая подгруппа из  $G$ . Из этого следует, что  $G = P \times D$ , где  $P$  — недедекиндова силовская  $p$ -подгруппа,  $D = p'$ -группа. Так как  $G$  — метатамилтонова группа, то ввиду предложения  $1G' = P'$  и потому  $D' = 1$ .

Если  $D$  содержит такой элемент  $d$ , что  $d \notin X$ , то по условию теоремы  $\langle d \rangle \triangleleft G$  и  $G/\langle d \rangle$  — дедекиндова группа,  $P \times \langle d \rangle / \langle d \rangle$  — ее дедекиндова подгруппа, что невозможно. Таким образом,  $d \in X$ . Понятно, что  $X = D \times X^*$ , где  $X^* = X \cap P$ ,  $X^*$  — собственная подгруппа из  $P$ .

Пусть  $M$  — максимальная подгруппа из  $P$ , содержащая  $X^*$ . Тогда  $P = \langle a \rangle M$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Очевидно, что для произвольного  $x$  из  $M$   $\langle ax \rangle \triangleleft X$  и, значит,  $\langle ax \rangle \triangleleft G$  и  $G/\langle ax \rangle$  — дедекиндова группа. Из этого ввиду теоремы 5 и следствия 5 из [18]  $P$  — группа одного из типов 1—3 настоящей теоремы. Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть  $G = P \times D$ , где подгруппы  $P$  и  $D$  из теоремы. Ввиду следствия 5 из [18]  $P$  — недедекиндова метатамилтонова группа. Так как  $D$  — абелева холловская подгруппа из  $G$ , то ввиду теоремы из [14]  $G$  — метатамилтонова группа.

Пусть  $g$  — примарный элемент из  $G$ , не содержащийся в подгруппе  $X = (X \cap P) \times D$ . Тогда  $g \in P$ . Ввиду следствия 6 из [17]  $P' \leq \langle g \rangle$ .

Пусть  $N$  подгруппа из  $G$ , не принадлежащая  $X$ . Тогда  $N$  содержит примарный элемент  $g$ , не принадлежащий  $X$ . По предыдущему утверждению  $\langle g \rangle \geq P' = G'$  и потому  $N \triangleleft G$  и  $G/N$  — дедекиндова группа. Достаточность доказана. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $G$  — черниковская  $\overline{TH}$ -группа с нецентральной полной частью  $R$ ,  $X^* = C_G(R)$  и  $G/R$  — недедекиндова группа. Тогда  $G = X^* \langle a^* \rangle$ ,  $X^* \cap \langle a^* \rangle = \langle (a^*)^{p^m} \rangle$ ,  $m > 0$ ,  $(a^*)^{p^{m-1}}$  индуцирует на  $R$  бесконечно неприводимый автоморфизм,  $R$  — примарная группа, подгруппы  $\langle Ra^* \rangle$  и  $X^*/R$  удовлетворяют в  $G/R$  тем же условиям, что и подгруппы  $\langle a \rangle$  и  $X$  в группе  $G$  из теоремы 1 соответственно.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — исследуемая группа,  $R$  и  $X^*$  — ее подгруппы, удовлетворяющие условиям следствия. Так как  $Z(G) \not\leq R$ , то  $X^*$  и  $X^*/R$  собственные инвариантные подгруппы из  $G$  и  $G/R$  соответственно.

Пусть  $N/R$  — произвольная подгруппа из  $G/R$ , не принадлежащая  $X^*/R$ . Тогда  $N$  — бесконечная неабелева подгруппа из  $G$  и потому  $N \triangleleft G$  и  $G/N$  — дедекиндова группа. Из этого получаем, что  $N/R \triangleleft G/R$  и  $G/R/N/R$  — дедекиндова группа. Следовательно,  $X^*/R$  — собственная подгруппа конечной недедекиндовой метатамилтоновой группы  $G/R$ , удовлетворяющая тем же условиям, что и подгруппа  $X$  в группе  $G$  из теоремы 1. Из этой теоремы вытекает, что  $G/R/X^*/R \cong G/X^*$  — циклическая  $p$ -группа по-

рядка  $p^m$ ,  $m > 0$ . Но тогда  $G = X^* \langle a^* \rangle$ ,  $X^* \cap \langle a^* \rangle = \langle (a^*)^{p^m} \rangle$ , где подгруппа  $\langle Ra^* \rangle$  удовлетворяет тем же условиям в  $G/R$ , что и подгруппа  $\langle a \rangle$  в  $G$  из теоремы 1. Ввиду предложения А  $(a^*)^{p^{m-1}}$  индуцирует на  $R$  бесконечно неприводимый автоморфизм,  $R$  — примарная группа. Следствие доказано.

**Следствие 2.** Если  $G$  — черниковская неметагильбертова  $\overline{H}$ -группа с полной частью  $R$  и нильпотентной фактор-группой  $G/R$ , то  $R$  — центральная квазициклическая подгруппа из  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — исследуемая группа. Так как  $G/R$  — конечная нильпотентная группа, то она не удовлетворяет условиям теоремы 1 и не является дедекиндовой группой. Поэтому из следствия 1 имеем  $Z(G) \geq R$ . Ввиду предложения А  $R$  — квазициклическая группа. Следствие доказано.

**Следствие 3.** Пусть  $G$  —  $\overline{H}$ - $p$ -группа, являющаяся нецентральным расширением квазициклической подгруппы  $R$  с помощью конечной недедекиндовой группы. Тогда  $G$  — 2-группа вида  $G = X \langle a \rangle$ ,  $X \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$ .  $X = C_G(R)$ ,  $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$ ,  $|R \cap \langle a \rangle| \leq 2$ ,  $[R, a] = R$ ,  $G' = R \langle a^2 \rangle$ ,  $\alpha > k \geq \alpha - k > 0$ ,  $k > 1$ ,  $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ ,  $\langle a^{2^{\alpha-k+1}}, a^{2^{k+1}}, a^{2^{\alpha-1}} \rangle \leq Z(G)$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — исследуемая группа,  $R$  — ее полная часть. Так как  $R$  — инвариантная нецентральная квазициклическая подгруппа из  $p$ -группы  $G$ , то в силу [6]  $p = 2$  и  $[G : X] = 2$ , где  $X = C_G(R)$ . Из этого следует, что  $G = X \langle a \rangle$ ,  $X \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$ ,  $[R, a] = R$ .

Положим  $A = R \langle a \rangle$ . Тогда  $a^2 \in Z(A)$ . Положим далее  $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$ . Ясно, что  $\alpha \geq 1$ , значит,  $a^{2^\alpha} \in Z(A)$ . Предположим, что  $|R \cap \langle a \rangle| > 1$ . Так как элемент  $a$  переводит любой элемент из  $R$  в обратный, то  $Z(A) \cap R$  совпадает с нижним слоем  $R$  и потому  $|R \cap \langle a \rangle| = 2$  и  $\langle a^2 \rangle = Z(A)$ . Значит,  $|R \cap \langle a \rangle| \leq 2$ .

Так как  $G/R$  — недедекиндова группа, то ввиду следствия 1 она удовлетворяет условиям теоремы 1, подгруппы  $\langle a \rangle$  и  $\bar{X}$  удовлетворяют тем же условиям в  $G/R$ , что и подгруппы  $\langle a \rangle$  и  $X$  в  $G$  из теоремы 1 соответственно, где в принятых обозначениях  $\bar{\langle a \rangle} = \langle Ra \rangle$ ,  $\bar{X} = X/R$ .

Так как  $|\bar{a}| = 2^\alpha$ , то ввиду теоремы 1  $\bar{G}' = \langle \bar{a}^{2^k} \rangle = \langle (Ra)^{2^k} \rangle = \langle Ra^{2^k} \rangle$ ,  $\alpha > k \geq \alpha - k > 0$ ,  $k > 1$ . Из этого следует, что  $G' = R \langle a^{2^k} \rangle$  и потому  $A \triangleleft G$ .

Если  $|R \cap \langle a \rangle| \neq 1$ , то  $\langle a^2 \rangle = Z(A)$  и  $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ . Пусть  $|R \cap \langle a \rangle| = 1$ . По-нятно, что  $G = AX$  и для произвольного  $x$  из  $X$   $[a, x] = ya^{s_0 k}$ , где  $y \in R$ . Из этого с учетом  $a^{-1}ya = y^{-1}$  легко получить, что  $[a^2, x] = a^{s_0 k + 1}$ . Отсюда  $x^{-1} \langle a^2 \rangle x = \langle a^2 \rangle$  и, следовательно,  $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ .

Теперь, рассматривая коммутаторы вида  $[a^{2^{\alpha-k+1}}, x]$ ,  $[a^{2^{k+1}}, x]$ ,  $[a^{2^{\alpha-1}}, x]$ , и учитывая соотношения  $k+1 > 2$ ,  $\alpha-k+1 > 1$ ,  $\alpha-1 > 1$ ,  $a^2 \in Z(A)$ , получаем  $\langle a^{2^{\alpha-k+1}}, a^{2^{k+1}}, a^{2^{\alpha-1}} \rangle \leq Z(G)$ . Следствие доказано.

**Теорема 2.** Неметагильбертовы черниковские  $\overline{H}$ - $p$ -группы исчерпываются группами следующих типов:

1)  $G$  — расширение квазициклической  $p$ -подгруппы  $R$  с помощью конечной дедекиндовой  $p$ -группы и  $G'$  содержит подгруппы порядка  $p^2$ ;

2)  $G = R \times B$ ,  $R$  — квазициклическая  $p$ -подгруппа,  $B$  — конечная метагильбертова  $p$ -группа,  $B'$  содержит подгруппы порядка  $p^2$ ;

3)  $G = RB$ ,  $R$  — центральная в  $G$  квазициклическая  $p$ -подгруппа,  $B$  — такая конечная  $p$ -подгруппа из  $G$ , что  $1 < B \cap R = B' \cap R \leq Z(G)$ ,  $B/R \cap B$  — недедекиндова метагильбертова группа и всякая неабелева подгруппа из  $B$ , содержащая  $R \cap B$ , инвариантна в  $G$ ;

4)  $G = (R \times \langle a \rangle) \rtimes B$ ,  $R$  — инвариантная в  $G$  квазициклическая 2-подгруппа,  $|a| = 2^\alpha$ ,  $[R, a] = R$ ,  $G' = R \times \langle a^{2^k} \rangle$ ,  $\alpha > k \geq \alpha - k$ ,  $k > 1$ ,  $C_G(R) = R \times \langle \langle a^2 \rangle \rtimes B \rangle$ ,  $B$  — конечная абелева 2-группа экспоненты  $2^\beta$ ,  $k \geq \beta \geq \alpha - k$ ,  $B = \langle b \rangle Z$ ,  $|b| = 2^\beta$ ,  $[\langle a \rangle, Z] \leq R$ , экспонента  $Z$  не превышает  $2^{2k-\alpha+1}$ ;

5)  $G = (R \langle a \rangle) \rtimes B$ ,  $R$  — инвариантная в  $G$  квазициклическая 2-подгруппа,  $|a| = 2^{\alpha+1}$ ,  $[R, a] = R$ ,  $G' = R \langle a^{2^k} \rangle$ ,  $a^{2^\alpha} \in R$ ,  $\alpha > k \geq \alpha - k$ ,  $k > 1$ ,  $C_G(R) =$



$= R(\langle a^2 \rangle \times B)$ ,  $B$  — конечная абелева 2-группа экспоненты  $2^\beta$ ,  $k \geq \beta \geq \alpha - k$ ,  $B = \langle b \rangle Z$ ,  $|b| = 2^\beta$ ,  $[\langle a \rangle, Z] \leq R$ , экспонента  $Z$  не превышает  $2^{2k-\alpha}$ ;

6)  $G = (R \times \langle a \rangle) Y$ ,  $R$  — инвариантная в  $G$  квазициклическая 2-подгруппа,  $[R, a] = R$ ,  $|a| = 2^\alpha$ ,  $\alpha > 2$ ,  $G' = R \times \langle c \rangle$ ,  $|c| = 2$ ,  $Z(G) \geq \langle a^2 \rangle$ ,  $Y \cap (R \times \langle a \rangle) = \langle c \rangle = Y'$ ,  $C_G(R) = (R \times \langle a^2 \rangle) Y$ .  $Y$  — почти прямое произведение подгрупп  $\langle c \rangle \times \langle b_i \rangle$  с объединенной подгруппой  $\langle c \rangle$ ,  $i \in I$ ,  $1 < |I| \leq n$ ,  $|b_i| = 2^{\beta_i}$ ,  $\alpha > \beta_i > 0$ ;

7)  $G = (R \langle a \rangle) \times B$ ,  $R \triangleleft G$ ,  $R$  разлагается в прямое произведение  $p-1$  квазициклических  $p$ -групп,  $p > 2$ ,  $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$ ,  $G' = R \langle a^{p^k} \rangle$ ,  $C_G(R) = (R \cdot \langle a^{p^m} \rangle) \times B$ ,  $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k > 0$ ,  $\langle a^{p^{m-1}} \rangle$  индуцирует на  $R$  группу бесконечно неприводимых автоморфизмов порядка  $p$ .  $B$  — конечная абелева  $p$ -группа экспоненты  $p^\beta$ ,  $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$ ,  $B = \langle b \rangle Z$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $[\langle a \rangle, Z] \leq R$ ;

8)  $G = (R \langle a \rangle) B$ ,  $R \triangleleft G$ ,  $R$  — разлагается в прямое произведение  $p-1$  квазициклических  $p$ -групп,  $p > 2$ ,  $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\alpha} \rangle$ ,  $G' = R$ ,  $C_G(R) = (R \langle a^{p^m} \rangle) B = R \times B$ ,  $\alpha \geq m > 0$ ,  $\langle a^{p^{m-1}} \rangle$  индуцирует на  $R$  группу бесконечно неприводимых автоморфизмов порядка  $p$ ,  $B$  — конечная абелева  $p$ -группа.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $G$  — исследуемая группа. Тогда ввиду предложения А  $G$  — черниковская группа с полной частью  $R$ , разлагающаяся в прямое произведение  $l$ -квазициклических  $p$ -подгрупп,  $l > 0$ ,  $G = X \langle a \rangle$ ,  $X = C_G(R)$ ,  $X \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^m} \rangle$ ,  $m \geq 0$ . Так как  $G$  — неметагамильтонова группа, то  $G'$  содержит подгруппу порядка  $p^2$ .

Пусть  $m = 0$ . В этом случае  $Z(G) \geq R$  и  $G$  удовлетворяет условиям леммы 2 и потому  $G$  — группа одного из типов 1–3 теоремы.

Пусть  $m > 0$ . Тогда  $Z(G) \not\geq R$ , и значит,  $X$  — собственная подгруппа из  $G$ . Ввиду предложения А элемент  $a^{p^{m-1}}$  индуцирует на  $R$  группу бесконечно неприводимых автоморфизмов порядка  $p$  и  $l = p - 1$ .

Рассмотрим следующие два возможных случая: 1)  $p - 1 > 1$ ; 2)  $p - 1 = 1$ .

**С л у ч а й 1.** В этом случае ввиду предложения А  $X' = 1$  и  $p > 2$ .

Пусть  $G/R$  — дедекиндова группа. Так как  $p > 2$ , то  $G/R$  — абелева группа. Понятно, что  $X = R \times B$ , где  $B$  — конечная абелева группа,  $G = (R \langle a \rangle) B$ . Так как элемент  $a^{p^{m-1}}$  индуцирует на  $R$  бесконечно неприводимый автоморфизм, то  $G' = R$ . Отсюда  $G$  — группа типа 8 теоремы.

Пусть  $G/R$  — недедекиндова группа. Тогда ввиду леммы 1  $\langle \bar{a} \rangle$  и  $\bar{X}$  удовлетворяют тем же условиям в  $\bar{G} = G/R$ , что и  $\langle a \rangle$  и  $X$  в  $G$  из теоремы 1, где  $\langle a \rangle = \langle Ra \rangle$ ,  $\bar{X} = X/R$ ,  $\bar{X}' = 1$ . Из теоремы 1 вытекает, что  $\langle \bar{a} \rangle$  и  $\bar{X}$  могут удовлетворять только условию 1 этой теоремы, поэтому  $\bar{G} = \langle \bar{a} \rangle \times \bar{B}$ , где  $\bar{B}$  удовлетворяет тем же условиям в  $\bar{G}$ , что и подгруппа  $B$  в  $G$  из теоремы 1.

Пусть  $A = R \langle a \rangle$ ,  $B^*$  — полный прообраз в  $G$  подгруппы  $\bar{B}$ . Тогда  $G = AB^*$ ,  $A \cap B^* = R$ . Из условия 1 теоремы 1  $\bar{B} \leq \bar{X}$ , поэтому  $B^* \leq X$  и, значит,  $B^* = R \times B$ , где  $B$  — конечное абелево дополнение  $R$  к  $B^*$ . Ясно, что  $G = A \times B$ , где  $\bar{B}$  совпадает с образом  $B$  в  $\bar{G}$ . Из условия 1 теоремы 1  $\bar{X} = \langle \bar{a}^{p^m} \rangle \times \bar{B}$ ,  $\bar{G}' = \langle \bar{a}^{p^k} \rangle$ ,  $|\bar{a}| = p^\alpha$ , экспонента  $\bar{B}$  равна  $p^\beta$ ,  $\alpha > k \geq m \geq \alpha - k$ ,  $k - m + 1 \geq \beta \geq \alpha - k$ ,  $\bar{B} = \langle \bar{b} \rangle \bar{Z}$ ,  $|\bar{b}| = p^\beta$ ,  $Z(\bar{G}) \geq \bar{Z}$ .

Так как  $\bar{B}$  — образ  $B$  в  $\bar{G}$ , то  $B = \langle b \rangle Z$ , где  $\langle b \rangle$  и  $Z$  — такие подгруппы из  $B$ , образы которых в  $\bar{G}$  совпадают с  $\langle \bar{b} \rangle$  и  $\bar{Z}$  соответственно. Поэтому  $|b| = p^\beta$ , экспонента  $B$  равна  $p^\beta$ . Так как  $G = A \times B$  и  $\bar{Z} \leq Z(\bar{G})$ , то  $|A, Z| \leq R$ . Понятно, что  $G' = R \langle a^{p^k} \rangle$ ,  $C_G(R) = X = (R \langle a^{p^m} \rangle) \times B$  и потому  $G$  — группа типа 6 теоремы.

**С л у ч а й 2.** В этом случае  $R$  — квазициклическая группа. Если  $G/R$  — дедекиндова группа, то  $G$  — группа типа 1 настоящей теоремы.

Пусть  $G/R$  — недедекиндова группа. Тогда  $G$  — 2-группа, удовлетворяющая условиям следствия 3 и потому  $G = X \langle a \rangle$ , где  $X$  и  $\langle a \rangle$  удовлетворяют заключению этого следствия. Отсюда  $\langle \bar{a} \rangle$ ,  $\bar{X}$  в  $\bar{G}$  удовлетворяют

тем же условиям, что  $\langle a \rangle$ ,  $X$  в  $G$  из теоремы 1. Рассмотрим следующие возможные случаи: 2.1)  $\langle \bar{a} \rangle$  и  $\bar{X}$  удовлетворяют условиям 1, 2 теоремы 1; 2.2)  $\langle \bar{a} \rangle$  и  $\bar{X}$  удовлетворяют условию 3 теоремы 1.

Случай 2.1. В этом случае  $\bar{G} = \langle \bar{a} \rangle \times \bar{B}$ , где  $\bar{B}$  удовлетворяет тем же условиям в  $\bar{G}$ , что и  $B$  в  $G$  из теоремы 1. Обозначим через  $B^*$  полный прообраз в  $G$  подгруппы  $\bar{B}$ . Тогда  $G = AB^*$ ,  $A = R \langle a \rangle$ ,  $A \cap B^* = R$ ,  $A \geq G'$ ,  $R \not\geq G'$ . Ясно, что  $B^*$  — бесконечная подгруппа из  $G$ . Если  $(B^*)' \neq 1$ , то  $B^* \triangleleft G$  и  $G/B^* \cong A/R$  — циклическая группа,  $G' \leq A \cap B^*$ , что невозможно. Следовательно,  $(B^*)' = 1$ .

Повторяя те же рассуждения, что в случае 1 при недекейности  $G/R$ , получаем  $B^* = R \times B$ ,  $G = A \times B$ , образ  $B$  и  $\bar{G}$  совпадает с  $\bar{B}$ . Из условий 1, 2 теоремы 1 имеем  $B$  — конечная абелева группа экспоненты  $p^\beta$ ,  $B = \langle b \rangle Z$ ,  $|b| = p^\beta$ , экспонента  $Z$  не превышает  $p^{2k-\alpha+1}$ . Так как  $\bar{B} \leq Z(\bar{G})$ , то  $[A, Z] \leq R$ . Если теперь  $A = R \times \langle a \rangle$ , то  $C_G(R) = R \times \langle a^2 \rangle \times B$  и поэтому  $G$  — группа типа 4 теоремы.

Пусть  $R \cap \langle a \rangle \neq 1$ . Тогда  $|R \cap \langle a \rangle| = 2$ ,  $|a| = p^{\alpha+1}$ . Ввиду следствия 3  $G' = R \langle a^{2^k} \rangle$ ,  $C_G(R) = R \langle a^2 \rangle \times B$ .

Покажем, что экспонента  $Z$  не превышает  $2^{2k-\alpha}$ . Предположим противное, т. е. пусть  $Z$  содержит элемент  $z$  порядка  $2^{2k-\alpha+1}$ . Очевидно, что  $\langle z \rangle$  дополняется в  $\langle z, b^{2^{\beta+1}-2k-1} \rangle$  с помощью  $\langle b_l \rangle$ , где  $b_l = b^{2^{\alpha+\beta-2k-1}} z^l$ ,  $l \not\equiv 0 \pmod{2}$ . Понятно, что  $b_l \in B$ . Пусть  $a_1 = ba^{2k+1-\beta}$ . Из соотношений  $[a, y] = ya^{2^k}$ ,  $y \in R$ ,  $k+1-\beta \geq 1$ , на основании известных коммутаторных тождеств [19] легко получаем  $[\langle a_1 \rangle, \langle b_l \rangle] = \langle a^{2^\alpha} \rangle$ ,  $\langle a \rangle \cap \langle a_1 \rangle = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$ . Отсюда в  $\langle a^2 \rangle \times B$  существует неабелева подгруппа  $\langle a_1 \rangle \times \langle b_l \rangle$ ,  $(\langle a_1 \rangle \times \langle b_l \rangle) \cap G' = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$  и, значит,  $G$  содержит неабелеву подгруппу  $G_1 = R \langle \langle a_1 \rangle \times \langle b_l \rangle \rangle$ , не содержащую  $G'$ . По условию  $G_1 \triangleleft G$ ,  $G/G_1$  — декейдова группа,  $\langle a \rangle \cap G_1 = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$ . Следовательно,  $G/G_1$  содержит элемент  $G_1 a$  порядка  $2^{k+1}$ . Так как  $k+1 > 2$ , то в силу [19] подгруппа  $G/G_1$  абелева, что неверно. Таким образом, экспонента  $Z$  не превышает  $2^{2k-\alpha+1}$  и  $G$  — группа типа 5 теоремы. Случай 2.1 рассмотрен.

Случай 2.2. В этом случае  $\bar{G} = G/R = \langle \bar{a} \rangle \bar{Y}$ ,  $\langle \bar{a} \rangle \cap \bar{Y} = \langle \bar{c} \rangle = \bar{G}' = \bar{Y}'$ ,  $|\bar{c}| = 2$ ,  $\bar{Y}$  — почти прямое произведение подгрупп  $\langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{b}_i \rangle$  с объединенной подгруппой  $\langle \bar{c} \rangle$ ,  $i \in I$ ,  $1 < |I| \leq n$ ,  $|b_i| = 2^{\beta_i}$ ,  $\alpha > \beta_i > 0$ ,  $\bar{X} = \langle \bar{a}^2 \rangle \bar{Y}$ .

Понятно, что  $\langle \bar{c} \rangle = G'/R$ ,  $G' = R \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle = R \langle c \rangle$ , где  $\langle c \rangle$  — некоторый прообраз элемента  $\bar{c}$  в  $G$ . Обозначим через  $Y^*$  полный прообраз в  $G$  подгруппы  $\bar{Y}$ . Так как  $\bar{Y} \leq \bar{X}$ , то  $Y^* \leq X$ , а значит,  $R \leq Z(Y^*)$ . По следствию 3  $a^{2^{\alpha-1}} \in Z(G)$ , поэтому  $G = AB^*$ ,  $A \cap B^* = G' \leq Z(B^*)$ ,  $A = R \langle a \rangle$ . Обозначим через  $Y_i$  полный прообраз в  $Y^*$  подгруппы  $\langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{b}_i \rangle$ . Тогда  $Y_i = G' \langle b_i \rangle$ , где образ  $\langle b_i \rangle$  в  $\bar{G}$  совпадает с  $\langle \bar{b}_i \rangle$ ,  $G' \cap \langle b_i \rangle = R \cap \langle b_i \rangle$ ,  $G' \leq Z(Y_i)$ . Отсюда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что абелева группа  $Y_i$  представима в виде  $G' \times \langle b_i \rangle$ , где  $|b_i| = 2^{\beta_i}$ . По определению 1  $Y^*$  — почти прямое произведение подгрупп  $Y_i = G' \times \langle b_i \rangle$  с объединенной подгруппой  $G'$ .

Предположим, что существуют две циклические подгруппы  $\langle b_i \rangle$  и  $\langle b_j \rangle$ , в которых найдутся такие элементы  $b_i \in \langle b_i \rangle$ ,  $b_j \in \langle b_j \rangle$ , что  $[b_i, b_j] \neq 1$  и  $[b_i, b_j] \in R$ . Тогда в  $G$  существует неабелева подгруппа  $G_1 = (R \times \langle b_i \rangle) \times \langle b_j \rangle$ , не содержащая  $G'$ . По условию  $G_1 \triangleleft G$ ,  $G/G_1$  — гамильтонова группа,  $G_1 \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$ ,  $\alpha > 2$ . Отсюда  $|G_1 a| > 4$ , что невозможно [19]. Таким образом,  $[b_i, b_j] \notin R$ . Не нарушая общности, можно считать, что  $[b_i, b_j] = c$ . Так как  $c^2 \in R$ ,  $G' \leq Z(Y^*)$ , то  $[b_i^2, b_j] = c^2 \in R$ , поэтому  $c^2 = 1$ ,  $G' = R \times \langle c \rangle$ .

Пусть  $N$  — нижний слой из  $G'$ . Тогда  $N = \langle y \rangle \times \langle c \rangle$ , где  $y \in R$ ,  $|y| = 2$ . Ясно, что  $N \leq Z(Y^*)$ ,  $N \leq Z(A)$ . Отсюда  $N \leq Z(G)$ .

Покажем, что  $A = R \times \langle a \rangle$ . Действительно, в противном случае  $c = a^{2^{\alpha-1}} c_1$ ,  $c_1 \in R$ . Так как  $c \in Z(G)$ ,  $a^{2^{\alpha-1}} \in Z(G)$ , то  $c_1 \in Z(G)$ . Но тогда  $c_1 \in$

$\in \langle y \rangle$ , а значит,  $|c_1| \leq 2$ . Отсюда  $|a^{2^{\alpha-1}}| \leq 2$  и поэтому  $s \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $a^{2^{\alpha-1}} \in R$ . Из этого получим  $c \in R$ , что неверно. Следовательно,  $A = R \times \langle a \rangle$ .

Выше установлено, что  $(Y^*)' \leq N$ . Покажем теперь, что  $(Y^*)' = \langle c \rangle$ . Пусть  $D_i = N \times \langle b_i \rangle$ . Тогда в  $Y^*$  существует конечная подгруппа  $D$ , являющаяся почти прямым произведением подгрупп  $D_i$  с объединенной подгруппой  $N$ . Понятно, что  $G = AD$ ,  $A \cap D = N$ . Нетрудно показать, что из условий  $\alpha > \beta_i > 0$ ,  $D' \leq N \leq Z(D)$ ,  $N$  — элементарная абелева группа,  $\alpha > 2$ , вытекает, что экспонента  $D$  не превышает  $2^{\alpha-1}$ . Предположим, что  $D' > \langle c \rangle$ . Тогда в силу [20] в  $D$  найдутся такие элементы  $g_1$  и  $g_2$ , что  $[g_1, g_2] = y$ . Положим  $G_2 = (R \times \langle a^2 \rangle) \langle g_1, g_2 \rangle$ . Так как  $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ ,  $a^2 \in \langle X \rangle$ ,  $G' = R \times \langle c \rangle$ , то легко заметить, что  $a^2 \in Z(G)$ . Из этого следует  $G_2' = \langle y \rangle$ . Положим далее  $A_1 = R \times \langle a^2 \rangle$ . Понятно, что  $G_2/R$  — абелева группа,  $A_1/R$  — ее циклическая подгруппа порядка  $2^{\alpha-1}$ . Очевидно, что  $G_2/R = \langle Ra^2, Rg_1, Rg_2 \rangle$ . Поскольку экспонента  $D$  не превышает  $2^{\alpha-1}$ , то  $A_1/R$  сервантна в  $G_2/R$ . В силу известных результатов [21]  $G_2/R = A_1/R \times G_3/R$ . Отсюда  $G_2 = A_1G_3$ ,  $A_1 \cap G_3 = R$ ,  $A \leq Z(G_2)$ ,  $G_2' = G_3' = \langle y \rangle$  и  $G_2 = \langle a^2 \rangle \times G_3$ . Так как теперь гамильтонова группа  $G/G_3$  содержит элемент  $[G_3a] > 4$ , то получаем противоречие с [19]. Полученное противоречие показывает, что  $D' = \langle c \rangle$ .

Пусть  $Y$  — почти прямое произведение  $\langle c \rangle \times \langle b_i \rangle$  с объединенной подгруппой  $\langle c \rangle$ . Тогда  $G = AY$ ,  $A \cap Y = \langle c \rangle$ , а  $G$  — группа типа 6 теоремы. Необходимость доказана.

Достаточность легко проверить непосредственно. Теорема доказана.

1. Ромалис Г. М. О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук. — 1962. — 17, № 6.
2. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах. I // Мат. зап. Урал. ун-та. — 1966. — 5, № 3. — С. 45—49.
3. Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М. О метагамильтоновых группах. II // Там же. — 1968. — 6, № 5. — С. 50—53.
4. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах. III // Там же. — 1970. — 7, № 3. — С. 195—199.
5. Черников С. Н. Бесконечные неабелевы группы, у которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн. — 1971. — 23, № 5. — С. 604—628.
6. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
7. Нагребцкий В. Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та. — 1967. — 6, № 1. — С. 80—88.
8. Махнев А. А. О конечных метагамильтоновых группах // Там же. — 1976. — 10, № 1.
9. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки. — 1983. — 34, № 2. — С. 179—188.
10. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. Строение метациклических метагамильтоновых групп (методические рекомендации). — Киев: Киев. пед. ин-т, 1983. — 22 с.
11. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строение групп и их подгрупповая характеристика. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 101—111.
12. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. Строение нильпотентных непериодических метагамильтоновых групп. — Киев, 1984. — 25 с. — Деп. в ВИНТИ, № 3208-84.
13. Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф. Строение конечных метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом. — Киев, 1984. — 16 с. — Деп. в ВИНТИ, № 6016-84.
14. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 2. — С. 6—9.
15. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 11. — С. 32—40.
16. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн. — 1987. — 39, № 2. — С. 180—185.
17. Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я. О почти квазициклических группах. — Киев, 1986. — 30 с. — Деп. в УкрНИИТИ, № 1742-Ук86.
18. Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я. О полубелевых группах. — Киев, 1987. — 34 с. — Деп. УкрНИИТИ, 670-Ук87.
19. Холл М. Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 468 с.
20. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969. — 631 с.
21. Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967. — 468 с.