

Группа автоморфизмов базы данных

1. **Определение основных понятий.** Постановка задачи. База данных предназначена для хранения информации и выдачи ответов на поступающие в нее запросы. Запрашиваться может то, что непосредственно хранится в базе данных, а также некоторая производная информация. Все это предполагает, что имеется некоторая совокупность данных и программных средств, позволяющих производить операции над данными. Система данных, как правило, организуется в определенную алгебру. Базу данных можно представить в виде некоторой алгебраической структуры, позволяющей более целенаправленно организовывать программные средства. С использованием этой структуры можно добиваться удовлетворения основных требований, предъявляемых к базе данных: непротиворечивости, целостности, отсутствия избыточности. Указанная структура позволяет также решать и другие задачи теории и практики баз данных.

В первом приближении база данных может рассматриваться как автомат вида $\mathcal{A} = (F, Q, R)$, где F — множество состояний, Q — алгебра запросов, R — алгебра ответов на запросы. Предполагается, что задана операция $*$: $F \times Q \rightarrow R$, так что $\bar{f} * q = r$, где r — ответ на запрос q в состоянии $\bar{f}$. Необходимо также потребовать, чтобы структура ответа на запрос была согласована со структурой самого запроса, т. е. чтобы отображение $\bar{f}: Q \rightarrow R$, определяемое через $\bar{f}(q) = \bar{f} * q$, являлось гомоморфизмом алгебр. Таким образом, алгебры Q и R должны быть однотипными алгеб-

рами, и так как запросы в базах данных строятся на основе языка исчисления предикатов первой ступени, то Q и R должны быть связаны с исчислением предикатов. Алгебраизация исчисления предикатов первой ступени достигается, в частности, на основе алгебр Халмоша, которые связаны с исчислением предикатов подобно тому как булевы алгебры связаны с исчислением высказываний. Чтобы дать формальное определение алгебры Халмоша, приведем необходимые предварительные сведения.

Рассмотрим множество переменных X и отображение $n: X \rightarrow \Gamma$, где Γ — множество сортов переменных. Это отображение разбивает множество X по сортам $X = (X_i, i \in \Gamma)$.

В схему также включено многообразие θ Γ -сортных Ω -алгебр. Через $W = (W_i, i \in \Gamma)$ обозначим свободную в θ алгебру над комплектом $X = (X_i, i \in \Gamma)$. Пусть $S = \text{End } W$ — полугруппа эндоморфизмов алгебры W , элементы из S переводят переменные из X_i в элементы из W_i .

Возьмем произвольную булеву алгебру H . Отображение $\exists: H \rightarrow H$ называется квантором существования, если выполняются следующие условия: 1) $\exists 0 = 0$; 2) $h < \exists h \ \forall h \in H$; 3) $\exists(h_1 \wedge \exists h_2) = \exists h_1 \wedge \exists h_2$.

H есть кванторная алгебра в схеме $n: X \rightarrow \Gamma$, если каждому $Y \subset X$ отвечает квантор существования $\exists(Y)$, причем имеют место свойства:

- 1) $\exists(\emptyset)h = h \ \forall h \in H$;
- 2) $\exists(Y_1 \cup Y_2)h = \exists(Y_1) \cdot \exists(Y_2)h \ Y_1 \subset X, Y_2 \subset X$.

Введем теперь понятие носителя элемента $\omega \in W_i$. Назовем $Y \subset X$ носителем ω , если для любых двух гомоморфизмов $\sigma_1: W \rightarrow \mathcal{D}$ и $\sigma_2: W \rightarrow \mathcal{D}$ из того, что $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \ \forall x \in Y$ следует, что $\sigma_1(\omega) = \sigma_2(\omega)$. Понятно, что каждый элемент ω обладает конечным носителем и, следовательно, можно выбрать минимальный носитель элемента ω . Минимальный носитель обозначим через $\Delta\omega$. Теперь дадим определение алгебры Халмоша. H является алгеброй Халмоша в данной схеме, если это кванторная алгебра, и полугруппа $S = \text{End } W$ действует в качестве полугруппы эндоморфизмов булевой алгебры H , удовлетворяя следующим требованиям:

- 1) $s_1\exists(Y) = s_2\exists(Y)$, если $s_1x = s_2x \ \forall x \notin Y, s_1, s_2 \in \text{End } W$;
- 2) $\exists(Y)s = s\exists(s^{-1}Y)$, если а) $s(x_\alpha) = s(x_\beta) \in Y$ возможно лишь при $x_\alpha = x_\beta$ и б) если $x \notin s^{-1}Y$, то $\Delta(sx) \cap Y = \emptyset$.

В приложениях часто бывает важно, чтобы в схеме языка исчисления предикатов присутствовал знак равенства. В качестве операции знак равенства можно определить и для алгебры Халмоша. Равенство в алгебре Халмоша H — это функция d , сопоставляющая каждой паре элементов w_1 и w_2 из одного и того же W_i элемент $d(w_1, w_2)$ алгебры Халмоша H так, чтобы выполнялись следующие аксиомы, имитирующие аксиомы равенства:

- 1) $sd(w_1, w_2) = d(sw_1, sw_2), s \in \text{End } W, w_1, w_2 \in W_i$;
- 2) $d(w, w) = 1$;
- 3) $d(w_1, w'_1) \wedge \dots \wedge d(w_n, w'_n) < d(w_1 \dots w_n \omega, w'_1 \dots w'_n \omega)$, где ω — операция соответствующего типа из Ω , и каждая пара $(w_1, w'_1) \dots (w_n, w'_n)$ принадлежит одному типу;

4) $s^{*\alpha}_w h \wedge d(w_1, w_2) < s^{*\alpha}_w h$; здесь $h \in H, w_1, w_2 \in W_i, s^{*\alpha}_w$ переводит x_α в w_1 , а все остальные x_β оставляет без изменений. Доказывается, что если в алгебре Халмоша можно задать равенство, то это можно сделать единственным способом. Верен также тот факт, что любую алгебру Халмоша можно вложить в алгебру Халмоша с равенством.

Введем понятие носителя элемента алгебры Халмоша. Подмножество $Y \subset X$ называется носителем элемента $h \in H$, если выполняется условие: $\exists(Y)h = h$. Носитель Y содержит все переменные из X , входящие в «состав» данного h . Это такие x , для которых выполняется $\exists x h \neq h$.

Рассмотрим теперь основные примеры алгебр Халмоша, которые используются в базах данных в качестве алгебры запросов и алгебры ответов на запросы

Начнем с алгебры ответов на запросы. Исходить будем из схемы алгебры Халмоша, описанной выше. Пусть $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_i, i \in \Gamma)$ — произвольная многосортная Ω -алгебра из многообразия θ . Обозначим через $\bar{D}$ декартово про-

извлечение $\bar{D} = D_1^{X_1} \times \dots \times D_k^{X_k}$, где $k = |\Gamma|$. Элементами в $\bar{D}$ являются наборы $a = (a^1, \dots, a^k)$, где a^i — отображение типа $X_i \rightarrow D_i$. Каждому $a \in \bar{D}$ отвечает гомоморфизм $W \rightarrow \mathcal{D}$. Следовательно, множество $\bar{D}$ можно отождествить с множеством $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$. Возьмем теперь множество всех подмножеств $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$ и обозначим его через $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{M}(X, \mathcal{D})$. Определим действие полугруппы $\text{End } W$ в $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$:

$$(\mu s)(x_\alpha) = \mu(sx_\alpha), \quad \mu \in \text{Hom}(W, \mathcal{D}), \quad s \in \text{End } W.$$

Далее, продолжим действие S на подмножества из $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$. Если $A \subset \text{Hom}(W, \mathcal{D})$, то $\mu \in sA$, если $\mu s \in A$. Теперь определим действие кванторов на $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Для этого каждому подмножеству $Y \subset X$ сопоставим квантор существования $\exists(Y)$ по следующему правилу: для любого $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ положим $\mu \in \exists(Y)A$, если в A найдется такой μ' , что $\mu(x) = \mu'(x) \quad \forall x \notin Y$. Доказывается, что определенная таким образом алгебра $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ является алгеброй Халмоща. На ней можно определить равенство d по правилу $d(\omega_1, \omega_2) = D_{\omega_1, \omega_2}$, где D_{ω_1, ω_2} есть множество всех $\mu \in \text{Hom}(W, \mathcal{D})$, для которых выполняется $\omega_1^\mu = \omega_2^\mu$. Множества вида D_{ω_1, ω_2} называются диагоналями алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Нетрудно заметить, что множество $V_{\mathcal{D}} = V(X, \mathcal{D})$, состоящее из всех тех элементов $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, которые имеют конечный носитель, является подалгеброй алгебры Халмоща $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{M}(X, \mathcal{D})$. Такая подалгебра $V_{\mathcal{D}}$, содержащая все диагонали, играет в базах данных роль универсальной алгебры ответов на запросы.

Перейдем теперь к построению алгебры запросов. Как отмечалось выше, эта алгебра связана с языком исчисления предикатов первой степени. Пусть в дополнение к уже описанной схеме задано множество символов отношений Φ . Каждому $\varphi \in \Phi$ отвечает определенный тип $\tau = (i_1 \dots i_m)$, тип операции $\omega \in \Omega$ имеет вид $\tau = (i_1 \dots i_m, j)$. Символ φ типа τ реализуется в качестве подмножества в декартовом произведении $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$, т. е. реализация $f(\varphi)$ есть подмножество в $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$; этим задается модель $(\mathcal{D}, \Phi, f)$. Реализация f рассматривается также как состояние заданной схемы в алгебре $\mathcal{D}$. Построим теперь множество формул исчисления предикатов над свободной алгеброй в многообразии θ .

Определим сначала элементарные формулы, как формулы вида $\varphi(\omega_1 \dots \omega_m)$, где φ — символ отношения типа $\tau = (i_1 \dots i_m)$, $\omega_i \in W_i$. Получили набор элементарных формул, который обозначим через Φ . Теперь с помощью операций $\wedge, \vee, \neg, \exists x_\alpha, x_\alpha \in X$, породим множеством $\bar{\Phi}$ свободную алгебру $\mathcal{L}\bar{\Phi}$.

Для каждого состояния f определяется интерпретация $\bar{f}$ формул из $\mathcal{L}\bar{\Phi}$ в алгебре Халмоща отношений $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Сделаем это для элементарных формул. Итак, если даны $\nu = \varphi(\omega_1 \dots \omega_m)$ и $\mu \in \text{Hom}(W, \mathcal{D})$, то положим $\mu \in \bar{f}(\nu) \Leftrightarrow (\omega_1^\mu \dots \omega_m^\mu) \in f(\nu)$. Затем, рассматривая множество $\mathcal{L}\bar{\Phi}$ как свободную алгебру, продолжаем данное отображение $\bar{f}$ на все формулы. Таким образом, имеем гомоморфизм $f: \mathcal{L}\bar{\Phi} \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$.

В рассматриваемом специализированном исчислении предикатов можно указать его аксиомы и правила вывода, связанные с заданным многообразием θ . Это позволяет определить на $\mathcal{L}\bar{\Phi}$ отношение τ следующим образом: $u \tau v \Leftrightarrow \vdash (u \rightarrow v) \wedge (v \rightarrow u)$, где $u, v \in \mathcal{L}\bar{\Phi}$, $\vdash w$ означает, что формула w выводима из аксиом. Можно показать, что τ -эквивалентность, согласованная с операциями алгебры $\mathcal{L}\bar{\Phi}$ и $u \tau v$, означает, что формулам u и v отвечает один и тот же запрос в любом состоянии f , и следовательно, им отвечает один и тот же ответ. Факторизуя алгебру $\mathcal{L}\bar{\Phi}$ по τ , получаем алгебру $U = \mathcal{L}\bar{\Phi}/\tau$, которая может быть наделена структурой алгебры Халмоща. Именно U и является универсальной алгеброй запросов в базе

данных и для каждого состояния f имеем гомоморфизм $f: U \rightarrow V_{\mathcal{D}}$. Из приводившихся рассуждений видно, что алгебра Халмоша U зависит только от схемы и не зависит от системы данных.

Вернемся снова к базам данных и уточним их определение, данное выше. Автомат $\mathfrak{A} = (F, Q, R)$, определенный в начале пункта, является автоматом типа вход — выход (запрос — ответ) и называется $*$ -автоматом. Здесь Q и R — алгебры Халмоша в заданной схеме. Для полного определения базы данных автомат $\mathfrak{A}$ необходимо привязать к алгебре данных $\mathcal{D}$.

Как уже отмечалось, роль алгебры запросов играет алгебра U , а алгебры ответов на запросы — алгебра $V_{\mathcal{D}}$. С набором символов отношений Φ и алгеброй $\mathcal{D}$ связано множество всех состояний базы — $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \mathcal{F}(\Phi, \mathcal{D})$. Таким образом, в заданной схеме каждой алгебре $\mathcal{D} \in \Theta$ отвечает тройка $\text{Atm } \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Гомоморфизм $\hat{f}: U \rightarrow V_{\mathcal{D}}$ определяет операцию $*$: $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} \times U \rightarrow V_{\mathcal{D}}$ по правилу: $f * u = \hat{f}(u)$ и тогда приходим к $*$ -автомату $\text{Atm } \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Этот автомат называется универсальным $*$ -автоматом и трактуется как универсальная база данных над алгеброй данных $\mathcal{D}$.

Рассмотрим сейчас связь абстрактного автомата $\mathfrak{A} = (F, Q, R)$ с алгеброй $\mathcal{D}$. Эта связь задается как представление-гомоморфизм автоматов: $\rho = (\alpha, \beta, \gamma): \mathfrak{A} = (F, Q, R) \rightarrow \text{Atm } \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Здесь $\alpha: F \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ — отображение множеств, которое абстрактные состояния делает реальными состояниями в алгебре $\mathcal{D}$, $\beta: U \rightarrow Q$ — гомоморфизм алгебр, действующий в противоположном стрелке ρ направлении. Он связывает абстрактные запросы с их записями в языке. Обратное направление объясняется тем, что любой абстрактный запрос начинается с его записи. Отображение $\gamma: R \rightarrow V_{\mathcal{D}}$ также является гомоморфизмом алгебр, который представляет ответы на запросы в виде отношений в системе $\mathcal{D}$. И, наконец, по определению гомоморфизма должно выполняться условие $f^{\alpha} * u = (f * u)^{\beta} \forall f \in F, u \in U$.

Теперь можно дать общее определение базы данных как алгебранческой структуры. База данных — это система $\mathfrak{A} = (F, Q, R, U, \mathcal{D}, \rho)$, где (F, Q, R) — абстрактный $*$ -автомат, U представляет схему, $\mathcal{D}$ — алгебра данных, ρ — представление в $\text{Atm } \mathcal{D}$.

Представление базы данных в виде алгебранческой структуры позволяет применять алгебранческий аппарат для изучения различных свойств баз данных. Целью данной статьи является рассмотрение группы автоморфизмов базы данных, и как первый шаг к этому, исследуется группа автоморфизмов алгебры Халмоша отношений.

2. Группа автоморфизмов алгебры Халмоша отношений. В данном пункте рассматриваются группы автоморфизмов специализированной алгебры Халмоша отношений и ее локально конечной части. Пусть X — множество переменных, Γ — множество сортов переменных, отображение $\pi: X \rightarrow \Gamma$ разбивает переменные по сортам. Ω — произвольный набор операций, θ — многообразие Ω -алгебр, W — свободная алгебра в θ над X . Возьмем в θ произвольную алгебру $\mathcal{D} = (D_i, i \in \Gamma)$. Для нее имеем множество $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$, множество всех подмножеств которого является специализированной в η алгеброй Халмоша $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Она понимается как алгебра отношений, поскольку ее элементы можно рассматривать также как подмножества в соответствующем декартовом произведении.

Перейдем теперь к рассмотрению группы автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Наша цель — связать ее с группой автоморфизмов алгебры $\mathcal{D}$. Зададим действие элементов $g \in G = \text{Aut } \mathcal{D}$ на множестве $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$ по следующему правилу: $(\mu g)(x) = \mu(x) g_{\pi(x)}$. Здесь элемент $\mu g: W \rightarrow \mathcal{D}$ есть произведение гомоморфизма $\mu: W \rightarrow \mathcal{D}$ и автоморфизма $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Перенесем действие группы G на $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Для любого $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ полагаем $g_* A = \{\mu: \mu g \in A\}$.

Предложение 1. *Определенное выше правило задает представление группы G на $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ в качестве группы автоморфизмов.*

Доказательство. Согласованность каждого g с булевыми операциями очевидна. Проверим согласованность действия $g \in G$ с кванторными операциями и с элементами из полугруппы эндоморфизмов $\text{End } W$. Сначала докажем равенство: $g_* \exists (Y) A = \exists (Y) g_* A$, где $A \in \mathfrak{M}_\emptyset$, $Y \subset X$. Возьмем $\mu \in g_* \exists (Y) A$, тогда $\mu g \in \exists (Y) A$ и по определению квантора существования существует $v \in A$ такое, что $\mu g(x) = v(x) \forall x \notin Y$. Возьмем $v_1 \in g_* A$, такой, что $v_1 g = v$. Тогда $\mu g(x) = v_1 g(x) \forall x \notin Y$ и $\mu(x) = v_1(x)$, а это означает, что $\mu \in \exists (Y) g_* A$. Включение в обратную сторону доказывается аналогично. Теперь покажем справедливость равенства $g_* s A = s g_* A$, где $s \in \text{End } W$. Очевидно, $\mu \in g_* s A \Leftrightarrow \mu g s \in A$ и $(\mu g s)(x) = (\mu g)(s x) = \mu(s x) g_{n(s x)} = (\mu s)(x) g_{n(x)} = (\mu s g)(x)$. Таким образом, $\mu s g \in A$ и, следовательно, $\mu \in s g_* A$. Обратное включение проверяется аналогично. Далее справедливы соотношения $(g_1 * g_2)_* A = g_{1*} (g_{2*} A)$ и $\varepsilon_* A = A$, где $g_1, g_2 \in G$, ε — единица в G . Тем самым предложение доказано.

Теперь покажем, что каждый автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}_\emptyset$ реализуется некоторым $g \in G$. Для доказательства этого факта необходимы некоторые предварительные замечания.

Рассмотрим булеву алгебру $\mathfrak{M}$ всех множеств произвольного множества M . Каждая подстановка σ множества M определяет автоморфизм σ_* алгебры $\mathfrak{M}$ по правилу $\sigma_* A = \{a : a\sigma \in A\}$, где $A \in \mathfrak{M}$. Верно и обратное.

Предложение 2. Каждый автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}$ порождается некоторой подстановкой множества M .

Доказательство. Возьмем τ -произвольный автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}$. Покажем, что найдется подстановка g множества M такая, что выполняется равенство

$$\tau A = gA \quad (1)$$

для произвольного $A \in \mathfrak{M}$. Вначале заметим, что если $A = \{a\}$ — одноэлементное множество, то и τA одноэлементно. Действительно, возьмем в τA одноэлементное подмножество B , $B \subset \tau A$. Тогда $\tau^{-1} B \subset A$ и так как A одноэлементно и $\tau^{-1} B$ непусто, то $\tau^{-1} B = A$ и $B = \tau A$. Построим теперь по τ подстановку g на M . Возьмем $a \in M$ и $A = \{a\}$. Тогда $B = \tau A$ состоит из одного элемента b и положим $bg = a$. Подстановка g действует также и на множестве $\mathfrak{M}$. Докажем вначале равенство (1) для случая одноэлементных множеств. По определению действия подстановки g на $\mathfrak{M}$ имеем $g_* A = \{c : cg \in A\}$, но $A = \{a\}$, следовательно, $a = cg$. Учитывая, что $a = bg$, получаем $c = b$ и $gA = \{b\} = \tau A$.

Перейдем к случаю, когда A — произвольное множество. Для этого надо показать справедливость равенства

$$\tau A = \bigcup_{a \in A} \tau \{a\}. \quad (2)$$

Очевидно, что $\bigcup_{a \in A} \tau \{a\} \subseteq \tau A$. Предположим включение строгое. Тогда

$$\tau A = \bigcup_{a \in A} \tau \{a\} \cup B, \quad (3)$$

где $B \neq \emptyset$ и $B \cap \left(\bigcup_{a \in A} \tau \{a\} \right) = \emptyset$. Из (3) имеем $A = \tau^{-1} \left(\bigcup_{a \in A} \tau \{a\} \right) \cup \tau^{-1} B$.

Возьмем в $\tau^{-1} B$ произвольное одноэлементное подмножество $A_0 = \{a_0\}$. Тогда $\tau A_0 \subset \bigcup_{a \in A} \tau \{a\}$ и $A_0 \subset \tau^{-1} \left(\bigcup_{a \in A} \tau \{a\} \right)$, что дает противоречие с требованием пустого пересечения B и $\bigcup_{a \in A} \tau \{a\}$. Таким образом, получили (2) и вместе с этим, учитывая, что $gA = \bigcup_{a \in A} g \{a\}$, доказали требуемое равенство (1).

Вернемся к множеству $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$. Обозначим через Σ группу всех его подстановок. Пусть Σ_i — группа всех подстановок множества D_i , $i \in \Gamma$,

и $\Sigma_x = \Sigma_{n(x)}$. Рассмотрим декартово произведение всех Σ_x , $x \in X$, и обозначим его через $\tilde{\Sigma}$. Определим действие $\tilde{\Sigma}$ на $\text{Hom } W, (\mathcal{D})$ следующим образом: $\forall \mu \in \text{Hom } (W, \mathcal{D}), \forall \sigma \in \tilde{\Sigma} \mu\sigma(x) = \mu(x)\sigma(x)$.

Введем сейчас понятие правильной подстановки. Подстановка множества $\text{Hom } (W, \mathcal{D})$ называется правильной, если $\forall \mu, \nu \in \text{Hom } (W, \mathcal{D}) \mu(x) = \nu(x)$ тогда и только тогда, когда $\mu t(x) = \nu t(x)$ для всех $x \in X$.

Множество всех правильных подстановок является подгруппой в группе Σ . Покажем, что эта подгруппа изоморфна $\tilde{\Sigma}$.

Понятно, что $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ действует в $\text{Hom } (W, \mathcal{D})$ как правильная подстановка, причем разные σ действуют по-разному. Определим теперь по правильной подстановке τ подстановку $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, которая действует в $\text{Hom } (W, \mathcal{D})$ также, как τ . Возьмем $a \in D_x = D_{n(x)}$ и выберем гомоморфизм μ такой, что $\mu(x) = a$. Подстановку σ выберем так, чтобы выполнялось $a\sigma(x) = (\mu\tau)(x)$. Такое требование корректно, так как оно не зависит от выбора μ , ввиду того, что τ — правильная подстановка. Осталось заметить, что $a\sigma(x) = \mu(x)\sigma(x) = \mu(x)\tau(x)$ для всех $x \in X$. Таким образом, получили требуемый изоморфизм.

В данной ситуации справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. Подстановка $\sigma \in \Sigma$ тогда и только тогда перестановочна с кванторами в $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, когда $\sigma \in \tilde{\Sigma}$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, $Y \subset X$. Проверим выполнение равенства $\sigma \exists(Y) A = \exists(Y) \sigma A$. Возьмем $\mu \in \sigma \exists(Y) A$, тогда $\mu\sigma \in \exists(Y) A$ и, следовательно, существует $v \in A$, что $\forall x \notin Y (\mu\sigma)(x) = v(x)$. Выберем еще v_1 такой, что $v_1(x) = (v\sigma^{-1})(x) \forall x \notin Y$. Имеем равенства для всех x , не лежащих в Y :

$$\mu(x) = (\mu\sigma\sigma^{-1})(x) = (\mu\sigma)(x)\sigma^{-1}(x) = v(x)\sigma^{-1}(x) = (v\sigma^{-1})(x) = v_1(x).$$

Но по определению $v_1 \in \sigma A$, следовательно, $\mu \in \exists(Y) \sigma A$. Обратное включение проверяется аналогично и требуемое равенство получено.

Пусть теперь подстановка $\sigma \in \Sigma$ перестановочна с квантором существования. Заметим сразу, что тогда и обратная подстановка σ^{-1} будет также перестановочна с кванторами. Возьмем далее два элемента μ и ν из $\text{Hom } (W, \mathcal{D})$ так, чтобы $\mu(x) = \nu(x)$ для некоторого $x \in X$. Определим $Y = X \setminus \{x\}$. Тогда $\mu \in \exists(Y) \{v\}$ и $\mu\sigma \in \sigma^{-1} \exists(Y) \{v\} = \exists(Y) \sigma^{-1} \{v\} = \exists(Y) \{v\sigma\}$. Отсюда имеем, что $\mu\sigma(x) = v\sigma(x)$. Применяя к последнему равенству подстановку σ^{-1} , получаем, что $\mu\sigma(x) = v\sigma(x)$ влечет $\mu(x) = v(x)$. Таким образом проверено, что σ — правильная подстановка, и, следовательно, предложение доказано.

Из последних двух предложений видно, что каждый автоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, перестановочный с кванторами, реализуется некоторой правильной подстановкой. Верно также и обратное утверждение.

Найдем теперь в $\tilde{\Sigma}$ все элементы, которые перестановочны с действием каждого s из полугруппы эндоморфизмов $S = \text{End } W$. Для этого выделим в $\tilde{\Sigma}$ подгруппу Σ_0 , состоящую из тех σ , для которых $\sigma(x) = \sigma(y)$ для любых x и y одного сорта. Подстановку $\sigma \in \Sigma_0$ можно представить в виде $\sigma = \{\sigma_i, i \in \Gamma\}$, где σ_i — подстановка множества D_i . Таким образом, группа Σ_0 является группой всех подстановок системы $\mathcal{D} = (D_i, i \in \Gamma)$, а группа автоморфизмов $G = \text{Aut } \mathcal{D}$ — ее подгруппой.

Предложение 4. Подстановка $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ перестановочна с действием каждого $s \in \text{End } W$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in G = \text{Aut } \mathcal{D}$.

Доказательство. По предложению 1 $\sigma \in G$ является автоморфизмом алгебры Халмوشа $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ и, следовательно, σ перестановочна с каждым $s \in \text{End } W$. Пусть теперь $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ и обладает свойством перестановочности с эндоморфизмами W . Докажем вначале, что $\sigma \in \Sigma_0$. Возьмем x и y одного и того же сорта и предположим, что $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. Выберем в $D_y = D_{n(y)}$ элемент a такой, что $a\sigma(x) \neq a\sigma(y)$, и $\mu \in \text{Hom } (W, \mathcal{D})$ такой, что $\mu(y) = a$. Пусть также s — произвольный эндоморфизм, переводящий

x в y . Тогда, учитывая, что перестановочность σ с действием $s \in \text{End } W$ в $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ равносильна перестановочности с s в $\text{Hom}(W, \mathcal{D})$, имеем

$$(\mu\sigma)(x) = (\mu\sigma)(sx) = (\mu\sigma)(y) = \mu(y)\sigma(y) = a\sigma(y)\xi$$

$$(\mu\sigma)(x) = (\mu s)(x)\sigma(x) = \mu(sx)\sigma(x) = \mu(y)\sigma(x) = a\sigma(x).$$

Отсюда $a\sigma(y) = a\sigma(x)$. Таким образом, пришли к равенству $\sigma(x) = \sigma(y)$, и, следовательно, $\sigma \in \Sigma_0$. Для завершения доказательства осталось показать, что σ сохраняет операции в $\mathcal{D}$. Пусть $\omega \in \Omega$ — операция типа $(i_1, \dots, i_n, j)$. Проверим, что $(a_1 \dots a_n \omega)^\sigma = a_1^\sigma \dots a_n^\sigma \omega$, где $a_i \in D_j$, $i \in \Gamma$. Возьмем $x, x_1, \dots, x_n \in X$ и $\mu \in \text{Hom}(W, \mathcal{D})$, чтобы выполнялось $x_1^\mu = a_1, \dots, x_n^\mu = a_n$ и $x^\mu = x_1 \dots x_n \omega$. Тогда $(\mu\sigma)(x) = ((\mu s)(x))^\sigma = (\mu(sx))^\sigma = ((x_1 \dots x_n \omega)^\mu)^\sigma = (a_1 \dots a_n \omega)^\sigma$ и $(\mu\sigma)(x) = (\mu\sigma)(sx) = (\mu\sigma)(x_1 \dots x_n \omega) = x_1^{\mu\sigma} \dots x_n^{\mu\sigma} \omega = a_1^\sigma \dots a_n^\sigma \omega$. Таким образом, доказано, что $\sigma \in G = \text{Aut } \mathcal{D}$.

Приведенные предположения доказывают следующую теорему.

Теорема 1. *Каноническое представление группы $\text{Aut } \mathcal{D}$ в качестве группы автоморфизмов алгебры Халмоша $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ определяет изоморфизм групп $\text{Aut } \mathcal{D}$ и $\text{Aut } \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$.*

Если алгебра $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ наделена структурой равенства, то и в этом случае справедлива аналогичная теорема.

Теорема 2. *Группа $\text{Aut } \mathcal{D}$ изоморфна группе автоморфизмов алгебры Халмоша $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ с равенством.*

Доказательство. Для доказательства, учитывая утверждение теоремы 1, достаточно проверить, что действие каждого $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$ согласовано с диагоналями алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, т. е. $g_* D_{w,w'} = D_{w,w'}$.

Пусть $\mu \in g_* D_{w,w'}$, т. е. $\mu g \in D_{w,w'}$. Тогда $w^{\mu g} = (w^\mu)^g = (w')^\mu$, $w^\mu = w'^\mu$ и $\mu \in D_{w,w'}$. Теперь покажем обратное включение. Итак, $\mu \in D_{w,w'}$, тогда $w^{\mu g} = (w^\mu)^g = (w')^\mu$ и $\mu g \in D_{w,w'}$ и, следовательно, $\mu \in g_* D_{w,w'}$. Теорема доказана.

В случае бесконечного множества X важную роль играет алгебра Халмоша $V_{\mathcal{D}}$, являющаяся локально конечной частью $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Понятно, что группа $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует в $V_{\mathcal{D}}$ в качестве группы автоморфизмов. Но возникает вопрос: исчерпываются ли этим все автоморфизмы алгебры $V_{\mathcal{D}}$. Используя соотношения Галуа, можно показать, что в случае конечной алгебры $\mathcal{D}$ группа $\text{Aut } \mathcal{D}$ индуцирует все автоморфизмы $V_{\mathcal{D}}$. Оказывается, что и в общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для любой алгебры $\mathcal{D}$ представление $\text{Aut } \mathcal{D} \rightarrow \text{Aut } V_{\mathcal{D}}$ есть изоморфизм групп.*

Доказательство. Возьмем в X конечное подмножество X^0 , содержащее переменные всех сортов. В схеме $n: X^0 \rightarrow \Gamma$ имеем алгебру Халмоша $V_{\mathcal{D}}^0$. Для нее по теореме 1 имеем $\text{Aut } V_{\mathcal{D}}^0 \approx \text{Aut } \mathcal{D}$ (ввиду конечности X^0). Рассмотрим теперь подалгебру $V_{\mathcal{D}}(X^0)$ алгебры $V_{\mathcal{D}}$, содержащую все элементы из $V_{\mathcal{D}}$, имеющие своим носителем X^0 . Покажем, что существует канонический изоморфизм между $V_{\mathcal{D}}^0$ и $V_{\mathcal{D}}(X^0)$. Для этого возьмем проектирование $\tilde{\pi}(Y): \tilde{D} \rightarrow D(Y)$, где $\tilde{D} = \prod_{\alpha \in X} D_\alpha = \prod_{\alpha \in X} D_{n(\alpha)}$; $D(Y) = \prod_{\alpha \in Y} D_\alpha = \prod_{\alpha \in Y} D_{n(\alpha)}$. По этому проектированию имеем отображение $\pi_*: B(Y) \rightarrow V_{\mathcal{D}}$, где $B(Y)$ — булева алгебра всех подмножеств множества $D(Y)$ и $\pi_*(A) = \{b \in \tilde{D}: b \tilde{\pi}(A)\}$. Нетрудно заметить, что $\pi_*: B(Y) \rightarrow V_{\mathcal{D}}(Y)$ есть изоморфизм булевых алгебр и учитывая, что $V_{\mathcal{D}}^0$ как булева алгебра, изоморфна алгебре $B(X^0)$ (по определению $V_{\mathcal{D}}^0$), имеем канонический изоморфизм $\pi = \pi(X^0): V_{\mathcal{D}}^0 \rightarrow V_{\mathcal{D}}(X^0)$ (согласованность с операциями алгебры Халмоша

проверяется тривиально). Пусть теперь σ — произвольный автоморфизм алгебры $V_{\mathcal{D}}$. Тогда ему отвечает автоморфизм σ_0 алгебры $V_{\mathcal{D}}^0$, соответствующий ограничению σ на $V_{\mathcal{D}}(X^0)$, и имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\sigma} & V_{\mathcal{D}} \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ V_{\mathcal{D}}^0 & \xrightarrow{\sigma_0} & V_{\mathcal{D}}^0. \end{array}$$

Далее, взяв $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$, имеем автоморфизмы g_* и g_*^0 алгебр $V_{\mathcal{D}}$ и $V_{\mathcal{D}}^0$ соответственно, причем очевидно, что справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{g_*} & V_{\mathcal{D}} \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ V_{\mathcal{D}}^0 & \xrightarrow{g_*^0} & V_{\mathcal{D}}^0. \end{array}$$

Теперь надо показать, что для любого автоморфизма $\sigma \in \text{Aut } V_{\mathcal{D}}$ найдется $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$, что $\sigma = g_*$. Для $\sigma_0 \in \text{Aut } V_{\mathcal{D}}^0$ существует $g^0 \in \text{Aut } \mathcal{D}$, что $\sigma_0 = g_{1*}^0$, так как X^0 — конечное множество.

Прежде всего заметим, что если g и g_1 из $\text{Aut } \mathcal{D}$ различны, то и g_*^0 и g_{1*}^0 также различны. Рассмотрим теперь новое конечное множество X^1 , содержащее X^0 . Соответственно имеем алгебру Халмоща $V_{\mathcal{D}}^1$. Тогда автоморфизму σ отвечает автоморфизм σ_1 в $V_{\mathcal{D}}^1$, причем можно подобрать $g_1 \in \text{Aut } \mathcal{D}$, что $\sigma_1 = g_{1*}^1$. Так как $V(X^0)$ является подалгеброй $V(X^1)$, то по аналогии с первой диаграммой имеем

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{D}}^1 & \xrightarrow{\sigma_1} & V_{\mathcal{D}}^1 \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ V_{\mathcal{D}}^0 & \xrightarrow{\sigma_0} & V_{\mathcal{D}}^0. \end{array}$$

Ее, в свою очередь, учитывая конечность множеств X^0 и X^1 , можно представить в виде

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{D}}^1 & \xrightarrow{g_{1*}^1} & V_{\mathcal{D}}^1 \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ V_{\mathcal{D}}^0 & \xrightarrow{g_{1*}^0} & V_{\mathcal{D}}^0. \end{array}$$

Помимо этого, используя тот факт, что g порождает автоморфизмы и в $V_{\mathcal{D}}^0$ и в $V_{\mathcal{D}}^1$, аналогично второй диаграмме имеем

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{D}}^1 & \xrightarrow{g_*^1} & V_{\mathcal{D}}^1 \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ V_{\mathcal{D}}^0 & \xrightarrow{g_*^0} & V_{\mathcal{D}}^0, \end{array}$$

которая также коммутативна.

Из последних двух диаграмм, учитывая единственность выражения σ_1 через автоморфизм алгебры $\mathcal{D}$, получаем $g_{1*}^1 = g_*^1$ и, следовательно, $g_{1*}^0 = g_*^0$. Таким образом, g совпадает с g_1 и σ_1 порождается тем же g , что и σ_0 . А так как любой элемент алгебры $V_{\mathcal{D}}$ принадлежит какой-то подалгебре $V(Y)$, где Y носитель этого элемента и $Y \supset X^0$, то и $\sigma \in \text{Aut } V_{\mathcal{D}}$ порождается этим же $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$, т. е. $\sigma = g_*$. Этим теорема доказана. Приведенные теоремы дают полное описание автоморфизмов алгебры Халмоща отношений и ее локально конечной части на основе автоморфизмов алгебры $\mathcal{D}$.

Эти результаты имеют непосредственное приложение к базам данных, где $\mathcal{D}$ является алгеброй данных, $V_{\mathcal{D}}$ — алгеброй Халмша ответов на запросы.

3. Группа автоморфизмов универсальной базы данных. Опишем группу автоморфизмов универсальной базы данных, определение которой дано в п. 1. Как известно, такая база данных представляет собой $\ast$ -автомат вида $\text{Atm } \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Во втором пункте по автоморфизму $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ строился автоморфизм $g_*: V_{\mathcal{D}} \rightarrow V_{\mathcal{D}}$ локально конечной части алгебры Халмша отношений. Сейчас по $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$ построим автоморфизм булевой алгебры $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, который также обозначается g_* .

Начнем с того факта, что $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ действительно является булевой алгеброй. Множество Φ состоит из символов отношений φ , каждый из которых имеет определенный тип $\tau = (i_1 \dots i_m)$. И тогда Φ можно представить в виде объединения $\Phi = \bigcup_{\tau} \Phi_{\tau}$, где Φ_{τ} — совокупность символов отношений

типа τ . Так как каждому $\varphi \in \Phi$ типа $\tau = (i_1 \dots i_m)$ отвечает отношение в декартовом произведении $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$, то множеству Φ_{τ} отвечает множество всех подмножеств $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$, обозначаемое нами в дальнейшем $\text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D})$. Понятно, что $\text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D})$ есть булева алгебра, и, следовательно, множество функций $\mathcal{F}^{\tau} = \text{Fun}(\Phi^{\tau}, \text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D}))$ с покомпонентным определением операций также является булевой алгеброй. И наконец, учитывая то, что множество всех состояний $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ есть декартово произведение всех $\mathcal{F}^{\tau}$, получаем, что и $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ является булевой алгеброй.

Итак, пусть теперь $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ — автоморфизм алгебры $\mathcal{D}$, в соответствии с которым имеем отображение $g_*: D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m} \rightarrow D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$. Далее определяем отображение $g_{\tau_*}: \text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D})$ булевой алгебры $\text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D})$ в себя по правилу $g_{\tau_*} B = \{a \in D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m} : g_{\tau}(a) \in B\}$. Легко понять, что g_{τ_*} — автоморфизм булевой алгебры $\text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D})$, если g — автоморфизм $\mathcal{D}$. Следующий этап — это задание отображения $\tilde{g}_{\tau}: \mathcal{F}^{\tau} \rightarrow \mathcal{F}^{\tau}$, где $\tilde{g}_{\tau}(f) = (f(\varphi))^{g_{\tau_*}}$. Так как $\mathcal{F}^{\tau}$ является декартовой степенью алгебры $\text{Rel}^{\tau}(\mathcal{D})$ с покомпонентным определением операций, то $\tilde{g}_{\tau}$ есть автоморфизм $\mathcal{F}^{\tau}$. Наконец, все $\tilde{g}_{\tau}$ покомпонентно определяют отображение $g_*: \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, которое, очевидно, является автоморфизмом булевой алгебры $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Приведем теперь без доказательства теорему, которой в дальнейшем будем пользоваться.

Теорема 4 [1]. Если $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ — алгебры из многообразия Θ , $\text{Atm } \mathcal{D}$ и $\text{Atm } \mathcal{D}'$ — соответствующие универсальные базы данных, то каждый эпиморфизм алгебр $\delta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ индуцирует вложение $\delta_*: \text{Atm } \mathcal{D}' \rightarrow \text{Atm } \mathcal{D}$. Здесь $\delta_* = (\delta_*^F, I, \delta_*^V)$, где $\delta_*^F: \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, $\delta_*^V: V_{\mathcal{D}} \rightarrow V_{\mathcal{D}}$ являются мономорфизмами соответствующих алгебр, индуцируемые δ .

Если $\delta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ — изоморфизм, то и $\delta_*: \text{Atm } \mathcal{D}' \rightarrow \text{Atm } \mathcal{D}$ будет изоморфизмом, в частности, если $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$, то соответствующее $g_* = (g_*^F, I, g_*^V)$ будет автоморфизмом универсальной базы данных $\text{Atm } \mathcal{D}$. Этот автоморфизм не действует на алгебру запросов U . Таким образом, имеем представление группы $G = \text{Aut } \mathcal{D}$ в качестве группы автоморфизмов универсальной базы данных $\text{Atm } \mathcal{D}$. Причем справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. Рассматриваемое представление дает изоморфизм между группой $\text{Aut } \mathcal{D}$ и подгруппой в $\text{Aut}(\text{Atm } \mathcal{D})$, состоящей из автоморфизмов, не меняющих запросы.

Доказательство. Пусть (α, γ) — произвольный автоморфизм алгебры $\text{Atm } \mathcal{D}$, не меняющий запросы. Так как γ — автоморфизм алгебры Халмша $V_{\mathcal{D}}$, то по теореме 3 он индуцируется некоторым $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$. Покажем сейчас, что α однозначно определяется этим γ .

Для любого $u \in U$ имеем $f^{\alpha} * u = (f * u)^{\gamma}$, по $(f * u)^{\gamma} = (f(u))^{\gamma}$. Тогда

$\hat{f}^\alpha(u) = (\hat{f}(u))^\gamma$. Таким образом, справедливо равенство гомоморфизмов $\hat{f}^\alpha = \hat{f}^\gamma$, т. е. $\hat{f}^\alpha$ определяется через $\hat{f}$ и γ , и, следовательно, α определяется через γ . Тогда α индуцируется тем же $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$, что и γ . Учитывая существование взаимно-однозначного соответствия между автоморфизмами алгебры $V_{\mathcal{D}}$ и автоморфизмами $\mathcal{D}$, завершаем доказательство предложения.

Перейдем к рассмотрению автоморфизмов $\text{Atm } \mathcal{D}$, меняющих алгебру запросов U . Пусть $\xi: U \rightarrow U$ — автоморфизм алгебры U . Определим по нему подстановку $\hat{\xi}$ на множестве $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ по правилу $\hat{\xi}f * u = f * \xi^{-1}u$, где $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, $u \in U$. Последнее равенство можно записать с помощью соответствующих гомоморфизмов в виде $\hat{\xi}f = \hat{f}\hat{\xi}^{-1}$, где $\hat{\xi}$ — действительно подстановка на $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, так как из определения имеем $\hat{f} = \hat{\xi}f \cdot \hat{\xi}$ и выполняется $\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2$.

Проверим последнее равенство: $\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2f = \hat{\xi}_2(\hat{f}\hat{\xi}_1^{-1}) = (\hat{f}\hat{\xi}_1^{-1})(\hat{\xi}_2^{-1}) = \hat{f}\hat{\xi}_1^{-1}\hat{\xi}_2^{-1} = \hat{f}(\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2)^{-1} = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2f$. Понятно также, что тождественное преобразование U определяет единичную подстановку. Таким образом, имеем представление $\text{Aut } U$ в качестве группы подстановок множества $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Теперь каждому $\xi \in \text{Aut } U$ сопоставим тройку $(\hat{\xi}, \xi, I)$. Так как $\hat{f}\hat{\xi} * u^{\xi} = f * \xi^{-1}\xi u = f * u = (f * u)^1$, то тройка $(\hat{\xi}, \xi, I)$ есть автоморфизм универсальной базы данных $\text{Atm } \mathcal{D}$. И тем самым задано представление $\text{Aut } U$ в $\text{Aut}(\text{Atm } \mathcal{D})$. Пусть, далее, $\text{Aut } U \times \text{Aut } \mathcal{D}$ — прямое произведение групп автоморфизмов. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Имеется каноническое представление*

$$\text{Aut } U \times \text{Aut } \mathcal{D} \rightarrow \text{Aut}(\text{Atm } \mathcal{D}),$$

являющееся изоморфизмом групп.

Доказательство. Имеем пару $(\xi, g) \in \text{Aut } U \times \text{Aut } \mathcal{D}$, причем ξ отвечает автоморфизм $(\hat{\xi}, \xi, I)$ автомата $\text{Atm } \mathcal{D}$, а g — автоморфизм (g_*, I, g_*) (здесь символом g_* отмечены разные отображения). Рассмотрим произведение автоморфизмов $(\hat{\xi}, \xi, I)(g_*, I, g_*) = (\hat{\xi}g_*, \xi, g_*)$. Покажем, что переход $(\xi, g) \xrightarrow{\psi} (\hat{\xi}g_*, \xi, g_*)$ есть гомоморфизм групп. Для этого заметим, что выполняется равенство $\hat{\xi}g_* = g_*\hat{\xi}$. Действительно, $\hat{f}\hat{\xi}g_* = (f * \xi^{-1}u)^{g_*} = f^{g_*} * \xi^{-1}u = f^{g_*}\hat{\xi}$. Отсюда следует, что перестановочны автоморфизмы $(\hat{\xi}, \xi, I)$ и (g_*, I, g_*) . Далее проверим, что выполняется $[(\xi_1, g_1)(\xi_2, g_2)]^{\psi} = (\hat{\xi}_1, g_1)^{\psi}(\hat{\xi}_2, g_2)^{\psi}$:

$$\begin{aligned} [(\xi_1, g_1)(\xi_2, g_2)]^{\psi} &= (\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2, \xi_1\xi_2, I)((g_1g_2)_*, I, (g_1g_2)_*) = \\ &= (\hat{\xi}_1, \xi_1, I)(\hat{\xi}_2, \xi_2, I)(g_{1*}, I, g_{1*})(g_{2*}, I, g_{2*}) = (\hat{\xi}_1, \xi_1, I)(g_{1*}, I, g_{1*}) \times \\ &\quad \times (\hat{\xi}_2, \xi_2, I)(g_{2*}, I, g_{2*}) = (\hat{\xi}_1, g_1)^{\psi}(\hat{\xi}_2, g_2)^{\psi}. \end{aligned}$$

Итак показано, что переход ψ есть гомоморфизм групп.

Инъективность этого гомоморфизма очевидна. Докажем его сюръективность. Пусть тройка (α, β, γ) — произвольный автоморфизм $\text{Atm } \mathcal{D}$. Тогда γ есть автоморфизм алгебры $V_{\mathcal{D}}$ и для некоторого $g \in \text{Aut } \mathcal{D}$ $\gamma = g_*$, β есть автоморфизм алгебры U и для некоторого $\xi \in \text{Aut } U$ $\beta = \xi$. Осталось проверить, что $\alpha = \hat{\xi}g_*$. Возьмем $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, $u \in U$. Тогда имеем $f^{\alpha} * u^{\beta} = (f * u)^{\gamma} = (f * u)^{g_*} = f^{g_*} * u = f^{\alpha} * \xi u = \hat{\xi}^{-1}f^{\alpha} * u$; и $f^{g_*} = \hat{\xi}^{-1}f^{\alpha}$, $f^{\alpha} = \hat{\xi}f^{g_*} = \hat{\xi}g_*f$. Таким образом, $\alpha = \hat{\xi}g_*$. Следовательно переход ψ в действительности является изоморфизмом групп $\text{Aut } U \times \text{Aut } \mathcal{D}$ и $\text{Aut}(\text{Atm } \mathcal{D})$. Теорема доказана.

Мы получили описание группы автоморфизмов универсальной базы данных через группы автоморфизмов алгебры запросов и алгебры данных. Знание группы автоморфизмов базы данных дает возможность использования различных свойств симметрий при изучении и конструировании баз.

1. Плоткин Б. И. Алгебраическая модель базы данных — автомата // Латв. мат. ежегодник. — 1983. — Вып. 27. — С. 216—232.
2. Halmos D. R. Algebraic logic. — New York : Chelsea Publ. Co, 1962. — 270 p.

Латв. ун-т

Получено 16.11.87