

О группах с конечной периодической частью

В пятидесятых годах С. Н. Черников опубликовал две работы [1, 2] о группах с конечными классами сопряженных элементов, т. е. об FC -группах. Особого выделения требует случай, когда FC -группа (или просто группа) обладает конечной периодической частью. Важность этого класса групп проявляется при рассмотрении заданной группы с точки зрения ее «близости» к неким «эталонным» группам, например к локально разрешимым группам, линейным группам, черниковским группам и т. д. В связи с этим, естественно, возник вопрос о характеристизации группы, обладающей конечной периодической частью, в классе всех групп. В настоящей статье этот вопрос решается для группы с инволюциями, обладающей конечной периодической частью. Здесь оказалось уместным введенное ранее автором понятие точки группы, суть которого состоит в следующем: некоторый элемент g конечного порядка группы G называется точкой, если, во-первых, для любой нетривиальной (g) -инвариантной конечной подгруппы K из G множество конечных подгрупп из $N_G(K)$, содержащих элемент g , конечно и, во-вторых, при $g = 1$ множество элементов конечных порядков из G конечно. Если $|g| = 2$, то g называется инволютивной точкой.

Получен следующий основной результат.

Т е о р е м а. *Группа G с инволюциями тогда и только тогда обладает конечной периодической частью, когда в ней для некоторой пары элементов x, y выполняются условия:*

- 1) почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $y^g, g \in G$, подгруппа $\text{gr}(x, y^g)$ конечна;
- 2) x, y — точки из G , одна из которых является инволюцией, а другая имеет порядок $\neq 2$.

Справедливость основного результата настоящей работы легко вытекает из следующего утверждения, которое будем называть основным л е м м о й.

Пусть G — группа, x, y — элементы из G , удовлетворяющие условиям:

- 1) почти для всех элементов вида $y^g, g \in G$, подгруппа $\text{gr}(x, y^g)$ конечна;

2) один из элементов x, y — инволютивная точка t в G , а другой — элемент z конечного порядка $\neq 2$;

3) множество инволюций из $N_G((z))$, сопряженных с t в G конечно либо пусто.

Тогда индекс $|G : C_G(z)|$ конечен и элемент z содержится в конечной нормальной подгруппе из G .

Приведем пример, показывающий, что теорема теряет силу в случае $|x| = |y| = 2$.

Пример. В [3] построена группа без кручения вида $A = \text{gr}(b, c)$, где $b^p = c^p = d$ и A/d — свободная периодическая группа простого периода $p \geq 665$. Рассмотрим группу $T = A_i(i) = (A \times A) \rtimes (i)$, где i — инволюция. Возьмем элемент $s = (d, d^{-1}) \in A \times A$. Очевидно, $s \in Z(A \times A)$ и $s^i = s^t$. Введем обозначения: $G = T/(s)$, $x = i$, $H = C_G(x)$, $\mathfrak{M}$ — множество строго вещественных элементов конечных порядков относительно x из $\text{gr}(A \times A)/(s)$.

Легко доказать, что $G = H\mathfrak{M}$ и тройка (G, x, x) удовлетворяет всем условиям теоремы, за исключением условия, что порядок элемента $y = x$ отличен от двойки. Однако теорема неверна для G .

Основная лемма доказывается в п. 4, причем главные этапы доказательства выделены как леммы 7—15. Результаты, полученные в пп. 2, 3, связаны с вопросами, отраженными в их названиях. Эти представляющие самостоятельный интерес результаты используются в п. 4.

Обозначения, используемые в работе, стандартны [4, 5].

1. Вспомогательные результаты. Будем говорить, что в G выполняется сильное условие (a, b) -конечности, если a, b — элементы из G и подгруппа $L_g = \text{gr}(a, b^g)$ конечна при любом $g \in G$.

Справедливы следующие утверждения.

1. Если в G выполняется сильное условие (a, a) -конечности, то для любой инволюции i из G выполняется сильное условие (i, a) -конечности.

Доказательство очевидно.

2. Если для некоторой инволюции $i \in G$ выполняется условие (i, i) -конечности, то для любой инволюции $k \in G$ выполняется сильное условие (k, i) -конечности.

Доказательство вытекает из свойств групп диэдра.

3. В бесконечной периодической группе с инволюциями никакая инволюция не является точкой.

Доказательство вытекает из теоремы [8].

4. Теорема Фробениуса (см., например, [10]). Пусть G — конечная группа, H — ее собственная подгруппа. Если $H \cap H^g = 1$, $g \in G \setminus H$, то $G = F \rtimes H$, $(|F|, |H|) = 1$, $F = \{1, \bigcup_{g \in G} H^g\}$. В этом случае говорят, что G — конечная группа Фробениуса, а $\bar{F}$ и H соответственно ее ядро и дополнение.

5. Теорема Фейта — Томпсона [12]. Конечная группа нечетного порядка разрешима.

6. Если G — конечная разрешимая группа, L — ее нильпотентный радикал, то $C_G(L) \leq L$ (см., например, [5]).

2. О некоторых вложениях инволюций в группах. Лемма 1. Любое бесконечное множество $\mathfrak{M}$ конечных подгрупп группы G с пересечением $T = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} H \ni i$, где i — инволютивная точка, почти

целиком (за исключением, быть может, конечного числа) состоит из подгрупп, изоморфных группам Фробениуса, с дополнениями, содержащими T , или группам типа $Sz(Q)$, $SL_2(Q)$, где Q — поле характеристики два, $T = P \rtimes (c)$ и P — некоторая силовская 2-подгруппа таких подгрупп [15].

Говорят, что подгруппа H сильно вложена в группу G , если она обладает инволюциями, но ни одно из пересечений $H \cap x^{-1}Hx$, $x \in G \setminus H$, инволюциями не обладает.

Лемма 2. Пусть G — группа, H — сильно вложенная подгруппа из G , i — некоторая инволюция из H , удовлетворяющие условию (*): почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $g^{-1}ig$, где $g \in G \setminus H$, подгруппы $\text{gr}(i, i^g)$ конечны.

Тогда

- 1) любой элемент $g \in G \setminus H$ обладает представлением $g = hj_g$, где $h \in H$, j_g — инволюция из $G \setminus H$;
- 2) для любой инволюции $j \in G \setminus H$ в подгруппе H существует множество элементов, строго вещественных относительно j , той же мощности, что и мощность множества инволюций из H ;
- 3) если k — инволюция из $G \setminus H$, то $|ik|$ конечен и нечетен;
- 4) все инволюции из H сопряжены в H ;
- 5) все инволюции из G сопряжены в G .

Доказательство. Сначала докажем утверждение 3. Случай, когда $|ik|$ четен, невозможен ввиду определения сильно вложенной подгруппы и свойств групп диэдра. Предположим, что $|ik|$ бесконечен. Рассмотрим подгруппу $V = (ik) \times (i)$. Если бы $H \cap (ik) = 1$, то число различных элементов вида $(ik)^{-1}i(ik)^m$, $m = 1, 2, \dots$, было бы бесконечным, причем $(ik)^m \notin H$, $m = 1, 2, \dots$. Но по условию (*) почти все подгруппы вида $\text{gr}(i, (ik)^{-m}i(ik)^m)$ являлись бы конечными, а это невозможно, так как V — бесконечная группа диэдра. Следовательно, $H \cap (ik) = (c) \neq 1$. Так как $k \notin H$, то и $ik \notin H$. Но тогда все элементы вида $ikc^m \notin H$, $m = 1, 2, \dots$, и, очевидно, число различных элементов вида $(ikc)^{-1}i(ikc)^m$ бесконечно. Снова применяя условие (*), приходим к противоречию с бесконечностью подгруппы V . Следовательно, V — конечная подгруппа и утверждение 3 доказано. Отсюда и из свойств групп диэдра как легко видеть, вытекает справедливость утверждений 4, 5. Утверждения 1, 2 с учетом доказанных выше утверждений 3 — 5 фактически доказаны в [14] (см. доказательство леммы 2.) Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть G — группа, i — ее инволюция, b — элемент конечного порядка > 2 , удовлетворяющие условиям:

- 1) $C_G(i)$, $C_G(b)$ обладают конечными периодическими частями;
- 2) почти для всех элементов вида b^g, i^g , $g \in G$, подгруппы $\text{gr}(i, b^g)$, $\text{gr}(b, i^g)$ являются группами Фробениуса с ядрами, не содержащими i^g, b^g и b, i^g соответственно.

Тогда в G выполняется сильное условие (i, i) -конечности.

Доказательство. Предположим, что в G существует бесконечная подгруппа диэдра вида $V = (x) \times (i)$. Пусть t — произвольный элемент из (x^2) . Очевидно, i, it сопряжены в V . Рассмотрим подгруппы вида $\text{gr}(b, it)$. По условию 2 в (x^2) найдется такая бесконечная последовательность различных элементов

$$t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \quad (1)$$

что $M_n = \text{gr}(b, it_n)$, $n = 1, 2, \dots$, — конечные группы Фробениуса с ядрами S_n , $n = 1, 2, \dots$, не содержащими элементы b, it_n . По предложению 4 подгруппы (b) , (b^{it_n}) сопряжены с помощью некоторого элемента d_n из S_n и $it_n = r_n d_n$, где r_n — инволюция из $C_G(b) \cap M_n$ или $d_n = r_n it_n$. По условию 1 число различных элементов вида r_n , $n = 1, 2, \dots$, конечно, а множество элементов вида t_n , $n = 1, 2, \dots$, бесконечно. По предложению 4 подгруппы $(br_n it_n)$, (b) сопряжены в G . Так как множество различных элементов вида $br_n it_n$, $n = 1, 2, \dots$, бесконечно, то с учетом условия 2 последовательность (1) можно подобрать так, чтобы подгруппы вида $L_n = \text{gr}(i, br_n it_n)$, $n = 1, 2, \dots$, являлись группами Фробениуса с ядрами F_n , $n = 1, 2, \dots$, не содержащими элементы $i, br_n it_n$. Отсюда, из предложения 4 и свойств групп Фробениуса [10], получим $br_n it_n = s_n c_n$, $c_n \in F_n$, $s_n \in C_G(i) \cap L_n$ или

$$c_n = s_n^{-1} br_n it_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

По условию 1 число элементов вида $u_n = s_n^{-1} br_n i$, $n = 1, 2, \dots$, очевидно, конечно. Но тогда найдутся такие помера, например 1 и 2, что $u = u_1 = u_2$. С учетом равенств (2) и $u = u_1 = u_2$ имеем $c_1 = ut_1$, $c_2 = ut_2$, где c_1, c_2 — строго вещественные элементы относительно i из ядер F_1, F_2 соответственно [10]. Отсюда получим $l = t_1^{-1} t_2 = c_1^{-1} c_2$, где $l \neq 1$ и $l \in (x^2)$. А так как

$l^i = l^{-1}$, то $l^{-1} = l^i = (c_1^{-1}c_2)^i = c_1^{-i}c_2^i = c_1c_2^{-1}$, т. е. элементы c_1, c_2^{-1} перестановочны. Но порядки элементов c_1 и c_2^{-1} конечны и, значит, $|l|$ также конечен, что невозможно, так как $l \neq 1 \in \langle x \rangle$, где $|x|$ бесконечен. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

3. Инволютивные точки и теоремы вложения для сопряженно бипримитивно конечных групп с инволюциями. Лемма 4. Пусть G — группа, i — ее инволютивная точка, удовлетворяющие условию (i, i) -конечности. Тогда справедливо хотя бы одно из утверждений:

1) G обладает конечной периодической частью;

2) в G выполняются следующие условия:

а) силовские 2-подгруппы циклические или конечные обобщенные группы кватернионов;

б) $H = C_G(i)$ обладает конечной периодической частью и H не содержится ни в какой большей подгруппе с таким свойством;

в) если L — конечная подгруппа из G , $L \leq H$ и $L \cap H \neq 1$, то L — группа Фробениуса с дополнением $L \cap H$.

Доказательство. Пусть G не обладает конечной периодической частью. Но тогда по определению точки группы и лемме Дицмана $C_G(i)$ обладает конечной периодической частью и $|G : C_G(i)|$ бесконечен. Множество $\mathfrak{M}$ подгрупп с периодической частью, содержащих $C_G(i)$, частично упорядочено и, очевидно, объединение любой его цепи принадлежит ему. По лемме Цорна $\mathfrak{M}$ обладает максимальным элементом, т. е. некоторой подгруппой H из $\mathfrak{M}$, не содержащейся ни в какой большей подгруппе из $\mathfrak{M}$. Пусть V — периодическая часть из H . Так как $i \in V \triangleleft H$, то по предположению 3 V — конечная подгруппа. Очевидно, $V \triangleleft H$ и V — автоморфно допустимая подгруппа в H . Отсюда ввиду максимальности H в $\mathfrak{M}$ вытекает, что $N_G(V) = N_G(H) = H$.

Возьмем в V произвольную инволюцию k . Если бы $\text{gr}(\{k^g \mid g \in G\}) \leq V$, то мы пришли бы, очевидно, к противоречию с определением точки i и условием (i, i) -конечности. Следовательно, для некоторого $c \in G$ инволюция $t = k^c \notin H$. Рассмотрим подгруппу диэдра $L = \text{gr}(i, t)$. Предположим, что L не является конечной группой Фробениуса с дополнением (i) и ядром (d) , где $d = it$. В этом случае либо $|d| = \infty$, либо $|d|$ четен. Случай, когда $|d| = \infty$ невозможен ввиду условия (i, i) -конечности и предположения 2.

Пусть $|d|$ четен. По свойствам групп диэдра (d) обладает инволюцией j и $j \in C_G(i) \cap C_G(t)$. Очевидно, $|H : C_G(j) \cap H|$ конечен, а так как i — точка и в $C_G(j)$ выполняется условие (i, i) -конечности, то $C_G(j)$ обладает конечной периодической частью R ввиду леммы Дицмана. Пересечение $H \cap C_G(j)$ обладает такой подгруппой X , что $|H : X| < \infty$, $X \triangleleft H$ и $V, R \leq C_G(X) \leq N_G(X)$. Но $t \in R$, а поэтому $t \in N_G(X)$. С другой стороны, $t \notin H$ и $H < N_G(X)$. Следовательно, $H \neq N_G(X)$ и ввиду определения H подгруппа $M = N_G(X)$ не обладает конечной периодической частью. Далее, $X \leq C_G(i) \leq H$ и $|H : X| < \infty$, причем X обладает конечной периодической частью. Но тогда $i \in X$ означало бы, что $|M : C_G(i)| < \infty$ и, так как i — точка, то по лемме Дицмана M обладала бы конечной периодической частью вопреки доказанному выше. Следовательно, $i \notin X$ и, очевидно, в $\bar{M} = M/X$ централизатор $C_{\bar{M}}(iX)$ конечен и выполняется условие (iX, iX) -конечности. С учетом предположения 2 из работы [8] следует, что M — локально конечная группа, а так как $H/X \neq \bar{M}$ и H/X — конечная подгруппа из $\bar{M}$, то H/X содержится в большей конечной подгруппе K/X из $\bar{M}$, где K — подгруппа из M и $X < H < K$. Очевидно, $|K : C_G(i)| < \infty$ и, как и выше, K обладает конечной периодической частью. Но $K \neq H$, $H < K$ и мы получаем противоречие с определением подгруппы H . Полученное противоречие означает, что d — элемент конечного нечетного порядка и инволюции i, t сопряжены в G по свойствам групп диэдра, а, значит и k, i также сопряжены в G .

Теперь докажем, что H — сильно вложенная подгруппа в G . Предположим, что это не так. Тогда $H \neq H^g$ для некоторого $g \in G$ и $H \cap H^g$ об-

ладает инволюцией k . По доказанному выше k — точка в G и кроме этого, $|H : C_G(k) \cap H|$, $|H^g : C_G(k) \cap H^g|$ конечны. Снова, по доказанному выше $C_G(K) \leq H \cap H^g$ и $H = H^g$, т. е. $g \in N_G(H) = H$. Следовательно, H — сильно вложенная подгруппа в G . Если бы H обладала более, чем одной инволюцией, то по лемме 2 и условию (i, i) -конечности в H существовал бы неединичный элемент c конечного порядка, строго вещественный некоторой инволюции $j \in G \setminus H$. По лемме 2 i и j сопряжены в G , а поэтому j является точкой. Рассмотрим подгруппу $M = C_G(c) \times \langle j \rangle$. Так как j — точка в M и в M выполняется условие (j, j) -конечности, то по лемме Дицмана M обладает конечной периодической частью. Далее, очевидно, $|H : M \cap H| < \infty$ и по доказанному выше легко получим противоречие с условием $j \notin H$. Следовательно, H обладает единственной инволюцией. Отсюда и из работы [9] вытекает, что силовские 2-подгруппы из H — циклические или обобщенные группы кватернионов, а по лемме 2 они являются силовскими в G и сопряжены в G .

Теперь докажем, что если $H^g \neq H$, то $H \cap H^g$ — либо единичная подгруппа, либо группа без кручения. Предположим, что некоторый элемент h из $H \cap H^g$ имеет конечный порядок и $h \neq 1$. Так как $H = C_G(i)$, то $i, i^g \in C_G(h)$ и, очевидно, $|H : C_G(h) \cap H| < \infty$. Далее, рассуждая аналогично, приходим к противоречию с определением подгруппы H . Отсюда на основании предложения 4 заключаем, что утверждение в) доказано и вместе с ним доказана и лемма. Лемма 4 и ее доказательство принадлежит В. И. Сенашову.

Лемма 5. Пусть G — группа, а — ее элемент порядка > 2 , удовлетворяющие условиям (i, i) -, (i, a) -конечности. Тогда G обладает конечной периодической частью.

Доказательство. Предположим, что G не обладает конечной периодической частью. В этом случае ввиду условия (i, i) -конечности и леммы 4 подгруппа H обладает следующими свойствами:

- 1) $H = C_G(i)$ и $|G : H|$ бесконечен;
- 2) H обладает конечной периодической частью и не содержится ни в какой большей подгруппе с таким свойством из G ;
- 3) если K — конечная подгруппа из G , $K \leq H$ и $K \cap H \neq 1$, то K — группа Фробениуса с дополнением $H \cap K$;
- 4) H обладает единственной инволюцией.

Сначала докажем, что в G выполняется сильное условие (i, i) -конечности. Предположим, что для некоторого элемента $s \in G$ подгруппа $B = \text{gr}(i, a^s)$ бесконечна. Из условия (i, a) -конечности и свойства 1 очевидно вытекает, что $|H : C_G(a^s) \cap H| < \infty$. По теореме Пуанкаре (упражнение 2.5.13 [4]) $H \cap C_G(a^s)$ обладает нормальной в H подгруппой T конечного индекса в H . А так как $B \leq C_G(T)$, то $T \triangleleft \text{gr}(H, B) = M$. Очевидно, $i \notin T$ и в $\bar{M} = M/T$ централизатор $C_{\bar{M}}(iT)$ конечен, причем в $\bar{M}$ выполняется условие (iT, iT) -конечности. С учетом предложения 2 из работы [8] вытекает, что M , как подгруппа, порожденная двумя конечными подгруппами H/T и BT/T , конечна. Но тогда $|M : H| < \infty$ и по свойству 1 $H = C_G(T)$. Но тогда по лемме Дицмана i содержится в конечной нормальной подгруппе из M . А так как i — точка в M , то по лемме Дицмана M обладает конечной периодической частью. Но $B \leq M$, $|a^s| < \infty$ и, значит, B — конечная подгруппа вопреки предположению, что B — бесконечная группа. Следовательно, любая подгруппа вида $\text{gr}(i, a^g)$, $g \in G$, конечна, т. е. в G выполняется сильное условие (i, a) -конечности.

Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \text{gr}(a, i^g)$, $g \in G \setminus H$. По доказанному выше они конечны, а по свойствам 3, 4 они — группы Фробениуса с дополнениями, содержащими i^g , и абелевыми ядрами F_g , $g \in G \setminus H$ [10]. Если бы элемент a принадлежал ядрам бесконечного множества различных подгрупп Фробениуса вида $L_g = F_g = \times \langle i^g \rangle$, $g \in G \setminus H$, то, используя свойства групп Фробениуса [10], легко получили бы противоречие с определением точки i и условием (i, i) -конечности. Отсюда и из свойства 1 вытекает, что в $G \setminus H$ найдется такой элемент c , для которого $L_g = F_g \times \langle (ak)^g \rangle$, где k — инволюция, сопряженная с i в G , и $k \in \langle ak \rangle$ [10].

Но тогда, не нарушая общности дальнейших рассуждений, будем предполагать, что $a \in H$. Отсюда, опираясь на свойства 2, 3, легко показать, что $C_G(a) \leq H$. Далее, четверка (G, H, i, a) удовлетворяет всем условиям основной теоремы из [13] и, значит, $G = F \times H$, где F — периодическая-абелева подгруппа. А так как i — точка, то по предложению 3 F — конечная подгруппа и, очевидно, $|G : H| < \infty$, вопреки свойству 1. Следовательно, G обладает конечной периодической частью и лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Группа с инволюциями тогда и только тогда обладает конечной периодической частью, когда она сопряженно бипримитивно конечна и в ней все периодические локально разрешимые подгруппы, содержащие некоторую фиксированную инволюцию, конечны.*

4. Доказательство основной леммы. Пусть G — некоторая бесконечная группа, x, y — ее элементы и для тройки (G, x, y) выполняются условия:

- 1) почти для всех элементов вида $y^g, g \in G$, подгруппа $\text{gr}(x, y^g)$ конечна;
- 2) один из элементов x, y — инволютивная точка t в G , а другой — элемент z конечного порядка $\neq 2$;

Введем множества $\mathfrak{X} = \{x^g | g \in G\}$, $\mathfrak{Y} = \{y^g | g \in G\}$.

Заметим, что для любых $x \in \mathfrak{X}, k \in \mathfrak{Y}$ тройка (G, s, k) удовлетворяет условиям 1, 2 основной леммы. Ниже всюду будем предполагать, что x — инволютивная точка в G , y — элемент порядка $\neq 2$ и в G для любой пары (s, k) , где $s \in \mathfrak{X}, k \in \mathfrak{Y}$, выполняется по крайней мере одно из условий:

$\mathfrak{X}$ -условие почти для каждого элемента вида $k^g, g \in G$, подгруппа $\text{gr}(s, k^g)$ конечна;

$\mathfrak{Y}$ -условие: почти для каждого элемента вида $s^g, g \in G$, подгруппа $\text{gr}(s^g, k)$ конечна.

Л е м м а 6. *Если (s) — силовская 2-подгруппа из (y) , то (s) содержится в конечной нормальной подгруппе из группы G .*

Доказательство. Если $s = 1$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $s \neq 1$ и j — инволюция из (s) . Очевидно, при любом из $\mathfrak{X}$ -, $\mathfrak{Y}$ -условий в G выполняется сильное условие (x, j) -конечности (предложение 2).

Если для некоторого $c \in G$ элемент xj^c имеет конечный нечетный порядок, то по свойствам групп диэдра x, j сопряжены в G и, значит, в G выполняется условие (x, x) -конечности. В этом случае тройка (G, x, y) удовлетворяет условиям леммы 5 и по этой лемме G обладает конечной периодической частью, в частности элемент s содержится в конечной нормальной подгруппе из G .

Пусть теперь для любого $g \in G$ элемент xj^g имеет четный порядок и t_g — инволюция из (xj^g) . По свойствам групп диэдра $t_g \in C_G(x)$, а по лемме 2 $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью и, значит, множество инволюций вида $t_g, g \in G$, конечно. Но тогда из бесконечности множества $\mathfrak{X} = \{j^g | g \in G\}$ вытекало бы, что для некоторого элемента $c \in G$ пересечение $C_G(t_c) \cap \mathfrak{X}$ бесконечно и инволюция x содержалась бы в бесконечном множестве конечных подгрупп из $C_G(t_c)$. Однако это невозможно, так как по предположению x — точка. Следовательно, $\mathfrak{X}$ — конечное множество и $|G : C_G(j)|$ конечен.

Пусть t — элемент наибольшего порядка из (s) , для которого индекс $|G : C_G(t)|$ конечен. Так как $j \in (t)$, то $t \neq 1$. По лемме Дицмана $t \in Z \triangleleft G$, где Z — конечная подгруппа. Если $s \in Z$, то лемма доказана. Предположим, что $s \notin Z$, и рассмотрим G/Z . Если k — элемент из (s) и kZ — инволюция из G/Z , то из условия (xZ, yZ) -конечности и предложения 2 вытекает, что все подгруппы вида $\text{gr}(xZ, k^gZ), g \in G$, конечны в G/Z . А так как x — точка, Z — нетривиальная конечная нормальная подгруппа в G , то, очевидно, $|G : C_G(k)|$ конечен. Но тогда мы получаем противоречие с определением элемента t . Следовательно, $s \in Z$ и лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству основной леммы. Предположим, что она неверна. В качестве контрпримера выберем тройку (G, x, y) , удовлетворяющую условиям замечания 1 и условию 3

основной леммы, причем элемент y не содержится в конечной нормальной подгруппе из G .

Л е м м а 7. Тройку (G, x, y) можно выбрать из множества контрпримеров таким образом, чтобы для нее были справедливы утверждения:

1) x — инволютивная точка, y — нетривиальный элемент конечного нечетного порядка;

2) в G выполняется по крайней мере одно из $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{S}$ -условий;

3) индексы $|G : C_G(x)|$, $|G : N_G(\langle y \rangle)|$ бесконечны и $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью;

4) если $N_G(\langle y \rangle)$ обладает инволюцией, сопряженной с x в G , то $N_G(\langle y \rangle)$ обладает конечной периодической частью;

5) для любых $s \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{S}$ тройка (G, s, k) удовлетворяет условиям 2, 3 основной леммы и по крайней мере одному из $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{S}$ -условий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно доказать утверждения 3, 4 и нечетность порядка элемента y . Отсюда с учетом замечания 1 будет вытекать справедливость леммы. Ввиду выбора контрпримера и леммы Дицмана [6, 7] индекс $|G : N_G(\langle y \rangle)|$ бесконечен. Если бы $|G : C_G(x)| < \infty$, то по лемме Дицмана G обладала бы конечной периодической частью. А так как y — элемент конечного порядка, то отсюда получили бы противоречие с бесконечностью индекса $|G : N_G(\langle y \rangle)|$. Следовательно, $|G : C_G(x)|$ бесконечен и по лемме Дицмана $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью. Утверждение 3 доказано.

По условию 3 основной леммы пересечение $\mathfrak{N} \cap N_G(\langle y \rangle)$ конечно и если оно непусто, то по лемме Дицмана и замечанию 1 $N_G(\langle y \rangle)$ обладает конечной периодической частью. Утверждение 4 доказано.

Если (s) — силовская 2-подгруппа из (y) , то по замечанию 1 и лемме 6 (s) содержится в конечной подгруппе Z , нормальной в G . Отсюда в силу выбора контрпримера (G, x, y) подгруппы $(s) \neq (y)$ и $y \notin Z$. В фактор-группе $\bar{G} = G/Z$ элемент $\bar{y} = yZ$ имеет нечетный порядок и $\bar{y} \neq Z$. Очевидно, тройка $(\bar{G}, xZ, \bar{y})$ является контрпримером к основной лемме. Утверждение 1 доказано и вместе с ним доказана лемма.

Для любой пары элементов s, k , где $s \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{S}$, введем множества: $\mathfrak{M}_{sh}$ — множество всех конечных подгрупп вида $L_g = \text{gr}(s, k^g)$, $g \in G$, $\mathfrak{A}_{sh} = \{L_c \in \mathfrak{M}_{sh} | L_c \text{ — группа Фробениуса с ядром, не содержащим элементы } s, k\}$, $\mathfrak{B}_{sh} = \{L_c \in \mathfrak{M}_{sh} | L_c \simeq \text{Sz}(Q), \text{ SL}(2, Q) \text{ либо } L_c \text{ — группа Фробениуса с ядром, содержащим элемент } k^c\}$, $\mathfrak{P}_{sh} = \{L_c \in \mathfrak{M}_{sh} | L_c \in \mathfrak{M}_{sh} \setminus \mathfrak{A}_{sh} \cup \mathfrak{B}_{sh}\}$. Далее, введем такие множества: $\tilde{\mathfrak{M}}_{sh} = \{L_c^{-1} | L_c \in \mathfrak{M}_{sh}\}$, $\tilde{\mathfrak{A}}_{sh} = \{L_c^{-1} | L_c \in \mathfrak{A}_{sh}\}$, $\tilde{\mathfrak{B}}_{sh} = \{L_c^{-1} | L_c \in \mathfrak{B}_{sh}\}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_{sh} = \{L_c^{-1} | L_c \in \mathfrak{P}_{sh}\}$.

Л е м м а 8. $\tilde{\mathfrak{B}}$ — конечное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна и пусть

$$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots \quad (3)$$

— произвольная бесконечная последовательность различных подгрупп из $\tilde{\mathfrak{B}}$ вида $V_n = \text{gr}(k, s_n)$, где $s_n \in \mathfrak{N}$, $n = 1, 2, \dots$. Если все подгруппы из (3) — группы Фробениуса с ядрами, содержащими элемент k , то по свойствам групп Фробениуса $s_n^{-1}ks_n = k^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$, и $N_G(\langle k \rangle)$ содержит бесконечно много инволюций, сопряженных с x в G , вопреки лемме 7. Отсюда вытекает, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $V_n \simeq \text{Sz}(Q)$, либо $\text{SL}(2, Q)$, $n = 1, 2, \dots$. Так как по лемме 7 k — элемент нечетного порядка и $k \neq 1$, то из элементарных свойств групп типа $\text{SL}(2, Q)$, $\text{Sz}(Q)$ в V_n следует, что существует инволюция $t_n \in \mathfrak{N}$ и $t_n \in N_G(\langle k \rangle)$, $n = 1, 2, \dots$. Снова по лемме 7 в последовательности $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ существует лишь конечное число различных инволюций. А поэтому, не нарушая общности рассуждений,

можно считать, что $t = t_1 = t_2 = \dots = t_n = \dots$ и $t \in T = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Так как $t \in$

$\mathfrak{N}$, то по лемме 7 t — инволютивная точка. Но t принадлежит T и $t^{-1}kt =$

$= k^{-1}$ — нетривиальный элемент нечетного порядка, что противоречит лемме 1. Следовательно, $\mathfrak{B}_{sk}$ — конечное множество и лемма доказана.

Лемма 9. Если $|C_G(y):Z(G)|$ конечен, то из $\mathfrak{H}$ -условия вытекает $\mathfrak{N}$ -условие и наоборот.

Доказательство. По лемме 7 $|G:C_G(x)|$ и по $\mathfrak{H}$ -условию для некоторой бесконечной последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (4)$$

представителей различных правых смежных классов по централизатору $C_G(x)$ подгруппы вида $L_n = \text{gr}(y \cdot x^{a_n})$, $n = 1, 2, \dots$, конечны и $L_s \neq L_m$ при $s \neq m$. Так как $|C_G(y):Z(G)| < \infty$, то, очевидно, последовательность (4) можно подобрать так, чтобы все подгруппы вида $L_n^{a_n^{-1}}$, $n = 1, 2, \dots$, были различными. Предположим, что для некоторого номера m подгруппа $L_m^{a_m^{-1}}$ является группой Фробениуса с ядром, не содержащим элементов x , $y^{a_m^{-1}}$. В этом случае ввиду предложения 4 и свойств групп Фробениуса в $\mathfrak{H} \cap C_G(x)$ найдется элемент b , и так как по лемме 7 $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью, то

$$|C_G(x):C_G(b) \cap C_G(x)| < \infty. \quad (5)$$

Но b и y сопряжены в G и по условию леммы

$$|C_G(y):Z(G)| < \infty. \quad (6)$$

Отсюда и из (5) вытекает

$$|C_G(x):Z(G)| < \infty. \quad (7)$$

Неравенства (6), (7), очевидно, означают, что в G выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия.

Отсюда и из леммы 1 вытекает, что множество $\{L_n^{a_n^{-1}} | n = 1, 2, \dots\}$ почти целиком состоит из подгрупп, являющихся группами Фробениуса с ядрами, содержащими элементы вида x^{a_n} , и подгрупп, изоморфных группам типа $Sz(Q)$, $SL(2, Q)$. Но тогда ввиду свойств таких групп и групп Фробениуса $a_n^{-1} x a_n \in N_G(y)$, $n = 1, 2, \dots$, и пересечение $\mathfrak{N} \cap N_G(y)$ бесконечно вопреки лемме 7. Следовательно, если в G выполняется $\mathfrak{H}$ -условие, то ввиду неравенства (6), (7) выполняется и $\mathfrak{N}$ -условие.

Пусть теперь в G выполняется $\mathfrak{N}$ -условие. Если все подгруппы вида $L_g = \text{gr}(x, y^g)$, $g \in G$, конечны, то утверждение леммы, очевидно, справедливо. Предположим, что для некоторого элемента b из $\mathfrak{H}$ подгруппа $L = \text{gr}(x, b)$ бесконечна. По $\mathfrak{N}$ -условию множество $\{b^r | r \in C_G(x)\}$, очевидно, конечно. Отсюда, так легко видеть, вытекает $|C_G(x):C_G(b) \cap C_G(x)| < \infty$. Но b и y сопряжены в G , а поэтому $|C_G(b):Z(G)| < \infty$ и $|C_G(x):Z(G)| < \infty$. В этом случае, как показано выше, в G выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия. Лемма доказана.

Лемма 10. $N_G((y)) \cap \mathfrak{N}$ непусто и $N_G((y))$ обладает конечной периодической частью.

Доказательство. Пусть в G выполняется $\mathfrak{N}$ -условие. По лемме 7 $|G:C_G(y)|$ бесконечен и по $\mathfrak{N}$ -условию множество конечных подгрупп вида $\text{gr}(x, y^a)$, $a \in G$, бесконечно. На основании леммы 1, используя свойства групп Фробениуса и групп типа $SL(2, Q)$, $Sz(Q)$, заключаем, что для некоторого элемента $u \in G$ подгруппа (y^u) централизуется или подгруппа (y^u) нормализуется некоторой инволюцией из $\mathfrak{N}$. Но тогда этим же свойством обладает и подгруппа (y) (напомним о $\mathfrak{H}$ -условии). Если все подгруппы вида $\text{gr}(y, x^g)$, $g \in G$, конечны, то в G выполняется $\mathfrak{N}$ -условие и по доказанному выше $N_G((y)) \cap \mathfrak{N}$ непусто. Предположим, что для некоторого $c \in G$ подгруппа $H = \text{gr}(y, x^c)$ бесконечна. Из $\mathfrak{H}$ -условия вытекает $|C_G(y):C_G(x^c) \cap C_G(y)| < \infty$ и $|C_H(y):Z(H)| < \infty$.

Тройка (H, x^c, y) удовлетворяет всем условиям леммы 7 и по лемме 9 в H выполняется $\mathfrak{N}$ -условие. Но тогда по доказанному выше $N_H((y)) \cap (H \cap$

$\cap \mathfrak{N}$) непусто и по лемме 7 $N_G((y))$ обладает конечной периодической частью. Лемма доказана.

Лемма 11. Если $|C_G(x):Z(G)| < \infty$, то $|C_G(y):Z(G)| < \infty$ и в G выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия.

Доказательство. По лемме 10 $N_G((y)) \cap \mathfrak{N}$ обладает инволюцией t и она содержится в конечной периодической части подгруппы $N_G((y))$, а это очевидно, означает, что

$$|C_G(y):C_G(t) \cap C_G(y)| < \infty. \quad (8)$$

Но t и x сопряжены в G и по условию леммы $|C_G(x):Z(G)| < \infty$. Отсюда и из неравенства (8) вытекает $|C_G(y):Z(G)| < \infty$. На основании двух неравенств легко доказывается выполнимость $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условий в группе G . Лемма доказана.

Лемма 12. Если для некоторых $s \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{H}$ подгруппа $M = \text{gr}(s, k)$ бесконечна, то $|C_M(s):Z(M)|$, $|C_M(k):Z(M)| < \infty$ и в M выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия.

Доказательство. По лемме 7 M удовлетворяет всем условиям основной леммы (относительно пары элементов s, k). Если в G выполняется $\mathfrak{N}$ -условие, то, очевидно, $|C_M(s):C_M(k) \cap C_M(s)| < \infty$, т. е. $|C_M(s):Z(M)| < \infty$. Отсюда по лемме 11 (применяем ее к тройке (M, s, k)) получаем $|C_M(k):Z(M)| < \infty$ и в M выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия.

Пусть теперь в G выполняется $\mathfrak{H}$ -условие. В этом случае $|C_M(k):Z(M)| < \infty$ и по лемме 9 (применяем ее к тройке (M, s, k)) в M выполняется $\mathfrak{N}$ -условие. Но тогда по доказанному выше $|C_M(s):Z(M)| < \infty$ и по лемме 11 в M выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия. Лемма доказана.

Лемма 13. Справедливы утверждения:

- 1) $|C_G(x):Z(G)|$ бесконечен;
- 2) все подгруппы вида $\text{gr}(x, y^a)$, $a \in G$, конечны.

Доказательство. Предположим, что

$$|C_G(x):Z(G)| < \infty. \quad (9)$$

По лемме 11

$$|C_G(y):Z(G)| < \infty \quad (10)$$

и в G выполняются $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условия. Очевидно, ввиду неравенств (9), (10) и $\mathfrak{N}$ -, $\mathfrak{H}$ -условий из конечности $\mathfrak{P}_{xy}$ следует конечность $\tilde{\mathfrak{P}}_{xy}$, а из бесконечности $\mathfrak{B}_{xy}$ — бесконечность $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$ и наоборот. По лемме 1 $\mathfrak{P}_{xy}$ — конечное множество и, значит, $\tilde{\mathfrak{P}}_{xy}$ — также конечное множество. Если бы $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$ было бесконечным, то, как отмечалось выше, $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$ было бы также бесконечным вопреки лемме 8. Следовательно, $\mathfrak{B}_{xy}$, $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$, $\mathfrak{P}_{xy}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_{xy}$ — конечные множества и по лемме 1 $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{N}_{xy}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_{xy} \setminus \tilde{\mathfrak{N}}_{xy}$ — также конечные множества. Но тогда по лемме 3 в G выполняется сильное условие (x, x) -конечности и по лемме 5 G обладает конечной периодической частью вопреки лемме 7. Полученное противоречие означает, что $|C_G(x):Z(G)|$ бесконечен и утверждение 1 леммы доказано.

Предположим, что для некоторого $a \in G$ подгруппа $M = \text{gr}(x, y^a)$ бесконечна. По лемме 7 тройка (M, x, y^a) является контрпримером к основной лемме, а поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $G = \text{gr}(x, y)$. По лемме 12 $|C_G(x):Z(G)| < \infty$, вопреки доказанному выше утверждению 1. Следовательно, все подгруппы вида $\text{gr}(x, y^c)$, $c \in G$, конечны и утверждение 2 доказано, а вместе с ним завершено доказательство леммы.

Лемма 14. Справедливы утверждения:

- 1) множества $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ конечны;
- 2) $C_G(k) \cap \mathfrak{N}$ непусто для любого $k \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. По лемме 8 $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk}$ — конечное множество. Докажем конечность множества $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$. Предположим, что $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ — бесконечное мно-

жество и $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ — некоторая бесконечная последовательность различных подгрупп из $\mathfrak{P}_{sh}$, где $L_n = \text{gr}(k, s_n)$, $s_n \in \mathfrak{N}$, $n = 1, 2, \dots$. Из лемм 1, 13 и определения множества $\mathfrak{P}_{sh}$, как легко видеть, вытекает, что число различных подгрупп вида L_n , $r \in C_G(s_n)$, конечно, а поэтому, очевидно, выполняется неравенство

$$|C_G(s_n) : C_G(k) \cap C_G(s_n)| < \infty. \quad (11)$$

По лемме 10 $N_G((k))$ обладает конечной периодической частью V и инволюцией i из $V \cap \mathfrak{N}$. Рассмотрим подгруппы $H_n = \text{gr}(L_n, V)$, $n = 1, 2, \dots$. Если бы для некоторого номера m подгруппа H_m была бесконечной, то по лемме 7 тройка (H_m, s_m, k) была бы контрпримером к основной лемме, причем ввиду неравенства (11) выполнялось бы условие $|C_{H_m}(s_m) : Z(H_m)| < \infty$, что противоречило бы лемме 13 и замечанию 1. Следовательно, все подгруппы вида H_n , $n = 1, 2, \dots$, конечны и $k, i \in V \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, где i — инволютивная точка. На основании леммы 1 и свойств групп Фробениуса заключаем, что бесконечное множество $\{L_n \leq H_n | n = 1, 2, \dots\}$ из $\mathfrak{P}_{sh}$ почти целиком состоит из подгрупп множества $\mathfrak{M}_{sh} \cup \mathfrak{B}_{sh}$ вопреки определению множества $\mathfrak{P}_{sh}$. Полученное противоречие означает, что $\mathfrak{P}_{sh}$ — конечное множество и утверждение 1 леммы доказано. Далее, по лемме 13 в G выполняется $\mathfrak{F}$ -условие и по лемме 7 множество $\mathfrak{M}_{sh}$ бесконечно и $\mathfrak{M}_{sh} = \mathfrak{M}_{sh} \cup \mathfrak{B}_{sh} \cup \mathfrak{P}_{sh}$, а по утверждению 1 настоящей леммы $\mathfrak{B}_{sh} \cup \mathfrak{P}_{sh}$ — конечное множество. Следовательно, $\mathfrak{M}_{sh}$ непусто. Но тогда, используя определение множества $\mathfrak{M}_{sh}$, предложение 4 и свойства групп Фробениуса [10] докажем, что $C_G(K) \cap \mathfrak{N}$ также непусто. Утверждение 2 доказано и лемма доказана.

Лемма 15. $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{N}_{xy}$ и $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{M}_{xy}$ — конечные множества.

Доказательство. Конечность $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{M}_{xy}$ доказана в лемме 14. Докажем конечность $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{N}_{xy} = \mathfrak{B}_{xy} \cup \mathfrak{P}_{xy}$. Так как x — инволютивная точка в G , то из леммы 1 вытекает конечность $\mathfrak{P}_{xy}$. Предположим, что $\mathfrak{B}_{xy}$ — бесконечное множество и $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ — некоторая бесконечная последовательность различных подгрупп из $\mathfrak{B}_{xy}$, где $L_n = \text{gr}(x, y_n)$, $y_n \in \mathfrak{S}$, $n = 1, 2, \dots$. По лемме 14 $\mathfrak{B}_{xy_n}$ — конечное множество и отсюда, очевидно, вытекает

$$|C_G(y_n) : C_G(x) \cap C_G(y_n)| < \infty. \quad (12)$$

Пусть V_n — конечная периодическая часть подгруппы $N_G((y_n))$ (лемма 10). Если бы для некоторого m подгруппа $H_m = \text{gr}(V_m, L_m)$ была бесконечной, то по лемме 7 тройка (H_m, x, y_m) была бы контрпримером к основной лемме, причем ввиду неравенства (12) выполнялось бы условие

$$|C_{H_m}(y_m) : Z(H_m)| < \infty, \quad (13)$$

а ввиду лемм 7, 14 для некоторой инволюции $t_m \in C_{H_m}(y_m)$, сопряженной с x в H_m , условие

$$|C_{H_m}(t) : C_{H_m}(y_m) \cap C_{H_m}(t_m)| < \infty. \quad (14)$$

Из (13), (14) вытекало бы $|C_{H_m}(x) : Z(H_m)| < \infty$ вопреки лемме 13. Следовательно, все группы вида H_n конечны и $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, причем каждая подгруппа H_n , $n = 1, 2, \dots$, содержит инволюцию $t_n \in C_{H_n}(y_n) \cap V_n$, сопряженную с x в G . Отсюда на основании леммы 1, предложения 4 и свойств групп Фробениуса [10] заключаем, что множество $\{H_n | n = 1, 2, \dots\}$ бесконечно и почти целиком состоит из подгрупп Фробениуса с ядрами, не содержащими x и элементы вида y_n , $n = 1, 2, \dots$. Но тогда, очевидно, найдется такой номер q , что $L_q \notin \mathfrak{B}_{xy}$, вопреки предположению. Следовательно, $\mathfrak{B}_{xy}$ — конеч-

ное множество, то и $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{N}_{xy}$ также конечное множество. Лемма доказана. Итак, по лемме 13 множество всех подгрупп вида $\text{gr}(y, x^a)$, $a \in G$, совпадает с $\mathfrak{M}_{xy}$, а множество всех подгрупп вида $\text{gr}(y, x^a)$, $a \in G$, — с $\tilde{\mathfrak{M}}$. Далее, согласно лемме 15 $\mathfrak{M}_{xy}$ почти целиком совпадает с $\mathfrak{N}_{xy}$, а $\tilde{\mathfrak{M}}_{xy}$ — с $\mathfrak{N}_{xy}$. Отсюда ввиду леммы 3 вытекает, что в G выполняется условие (x, x) -конечности. Но тогда в силу леммы 5 G обладает конечной периодической частью вопреки лемме 7. Полученное противоречие доказывает справедливость основной леммы.

1. Черников С. Н. О группах с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР. — 1957. — 114, № 6. — С. 1177—1179.
2. Черников С. Н. О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Там же. — 115, № 1. — С. 60—63.
3. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975. — 336 с.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп — 3-е изд. — М.: Наука, 1982. — 288 с.
5. Gorenstein D. Finite Groups. — New York: Chelsea, 1980. — 528 p.
6. Курош А. Г. Теория групп. — 3-е изд., доп. — М.: Наука, 1967. — 648 с.
7. Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. — М.: Наука, 1978. — 120 с.
8. Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. — 1972. — 11, № 4. — С. 470—494.
9. Холл М. Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 468 с.
10. Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. — М.: Наука, 1968. — 112 с.
11. Bender H. Transitive gruppen gerader ordnung, in denen jede involution genau einen Punkt festlässt // J. Algebra. — 1971. — 17, N 4. — P. 527—554.
12. Feit W., Thompson T. G. Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. — 1963. — 13, N 3. — p. 775—1025.
13. Шунков В. П. Группы с инволюциями. Ч. 1. — Красноярск, 1986. — 27 с. — (Препринт, АН СССР. Сиб. отд-ние, ВЦ: 4).
14. Шунков В. П. О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика. — 1967. — 6, № 3. — С. 113—123.
15. Сенашов В. И. Характеризация слойно конечных групп: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск, 1985. — 102 с.

ВЦ СО АН СССР, Красноярск

Получено 29.07.87