

Сингулярная односточечная задача для нелинейной системы с запаздыванием

Изучается существование и асимптотика при $t \rightarrow +0$ решений нелинейной системы с запаздыванием

$$tX'(t) = A(t)X(\varphi(t)) + f(t, X(t), X(\psi(t))), \quad 0 < t < b \leq +\infty, \quad (1)$$

где:

а) $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ непрерывна на $(0, b)$ и представима в виде $A(t) = A + \alpha(t)$, $\|\alpha(t)\| = O(t^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $t \rightarrow +0$;

б) вектор-функция $f(t, X, Y)$ непрерывна на $(0, b) \times R^n \times R^n$;

с) отклонения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $(0, b)$ и $0 < \varphi(t) \leq t$, $0 < \psi(t) \leq t$.

Пусть далее существует точка $c \in (0, b)$ такая, что:

д) $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $0 < t < c$;

е) $\|f(t, X_1, Y_1) - f(t, X_2, Y_2)\| \leq q(t) \|X_1 - X_2\|$, $0 < t < c$, где функция $q(t)$ непрерывна на $0 < t < c$ и удовлетворяет условию $q(t) = O(t^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $t \rightarrow +0$;

ж) $\varphi(t) = \lambda t$, $0 < \lambda < 1$, $0 < t < c$;

г) при $t \geq c$ матрица $A(t)$, вектор-функция $f(t, X, Y)$ и отклонения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ допускают существование, единственность и продолжимость на $c \leq t < b$ решения основной начальной задачи для уравнения (1) с произвольной непрерывной на $(0, c]$ начальной вектор-функцией.

Отметим сразу, что условие г) влечет за собой возможность доказывать существование решений уравнения (1) лишь в достаточно малой правой полукрестности точки $t = 0$.

Сделаем замену переменной $t = e^x$ и положим $X(t) = X(e^x) = Y(x)$, $\tilde{\varphi}(x) = \ln \varphi(e^x)$, $\tilde{\psi}(x) = \ln \psi(e^x)$, $A(t) = A + \alpha(t) = A + \alpha(e^x) = A + \beta(x) = B(x)$, $f(t, X(t), X(\psi(t))) = f(e^x, X(e^x), X(\psi(e^x))) = f_*(x, Y(x), Y(\tilde{\psi}(x)))$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Y'(x) = B(x)Y(\tilde{\varphi}(x)) + f_*(x, Y(x), Y(\tilde{\psi}(x))), \quad -\infty < x < \ln b \leq +\infty, \quad (2)$$

а задача о существовании на $(0, b)$ решений уравнения (1) сводится к задаче о существовании двусторонних решений уравнения (2).

Конечный результат работы о существовании и структуре бесконечно-мерного многообразия двусторонних решений уравнения вида (2) анонсирован в [1]. Линейное уравнение ($f \equiv 0$) изучалось в работах [2—5].

1. Линейная система с постоянной матрицей. Рассмотрим линейную систему

$$tZ'(t) = AZ(\lambda t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

где постоянная $(n \times n)$ -матрица A и число λ , $0 < \lambda < 1$, фигурируют соответственно в условиях а) и ж). Решения уравнения (3) будем искать в виде

$$Z(t) = t^p P_m(\ln t), \quad (4)$$

где p — постоянная, вообще говоря, комплексная, а

$$P_m(\ln t) = \frac{\ln^m t}{m!} V_0 + \frac{\ln^{m-1} t}{(m-1)!} V_1 + \dots + V_m \quad (5)$$

— многочлен с векторными коэффициентами. Подставляя (4) в (3), после сокращения на t^p получаем

$$pP_m(\ln t) + t \frac{d}{dt} P_m(\ln t) = \lambda^p A P_m(\ln \lambda t). \quad (6)$$

Для $m = 0$ из (6), (5) будем иметь

$$(\lambda^p A - pE) V_0 = 0. \quad (7)$$

Для $m > 0$ получим рекуррентные соотношения

$$\rho P_m(\ln t) + P_{m-1}(\ln t) = \lambda^\rho A P_m(\ln \lambda t), \quad (8)$$

откуда в силу (5) и (7) последовательно для $m = 1, 2, \dots$

$$(\lambda^\rho A - \rho E) V_m = (1 - \rho \ln \lambda) V_{m-1} - \lambda^\rho A \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2!} V_{m-2} + \dots + \frac{\ln^m \lambda}{m!} V_0 \right), \quad (9)$$

где $V_k = 0$ для $k < 0$, т. е. для $m = 1$ второе слагаемое в (9) исчезает.

Пусть матрица $\tilde{A}$, подобная A , имеет каноническую жорданову форму, содержащую $p_r \times p_r$ клетки, $r = 1, 2, \dots, l$; $p_1 + p_2 + \dots + p_l = n$, соответствующие собственным значениям s_r матрицы $\tilde{A}$, а значит и A . В силу (7) в (4) число ρ должно быть корнем ρ_{rv} характеристического уравнения

$$\rho = s_r \lambda^\rho, \quad (10)$$

а V_0 — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению s_r .

Таким образом, если $\rho \ln \lambda \neq 1$, получаем систему решений уравнения (3)

$$Z_{rmv}(t) = t^{\rho_{rv}} P_{rmv}(\ln t), \quad (11)$$

где $r = 1, 2, \dots, l$; $m = 0, 1, \dots, p_r - 1$; $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, если $s_r \neq 0$ (для $s_r = 0$ уравнение (10) имеет единственный корень $\rho_{r0} = 0$). Число $\rho = 1/\ln \lambda$ может быть корнем характеристического уравнения (10) лишь в случае, когда $s_r = 1/e \ln \lambda$. При этом $\rho = 1/\ln \lambda$ является двукратным корнем характеристического уравнения ($\rho_{r0} = \rho_{r1} = 1/\ln \lambda$) и ему соответствуют две цепочки решений уравнения (3):

$$Z_{rm0}(t) = t^{1/\ln \lambda} P_{rm0}(\ln t), \quad m = 0, 1, \dots, p_r - 1, \quad (12)$$

$$Z_{rm1}(t) = t^{1/\ln \lambda} P_{rm1}(\ln t), \quad m = 0, 1, \dots, p_r - 1. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае в силу (9) векторы V_0 и V_1 линейно зависимы (положим $V_1 = V_0$), а клетке $p_r \times p_r$ матрицы $\tilde{A}$ соответствует $p_r - 1$ присоединенных векторов. Поэтому уравнение (9) для определения векторов V_m имеет решение для $m = 1, 2, \dots, p_r$ и можно положить

$$P_{rm1}(\ln t) = P_{r(m+1)0}(\ln t) - P_{rm0}(\ln t), \quad m = 0, 1, \dots, p_r - 1. \quad (14)$$

Решения вида (11) ((12), (13)) принято называть основными решениями уравнения (3).

Из теоремы 1.1, доказанной в [5], следует такое утверждение.

Т е о р е м а 1. *Всякое решение со степенным ростом при $t \rightarrow +0$ уравнения (3), определенное в правой полукрестности точки $t = 0$, кроме, может быть, самой точки $t = 0$, представимо в виде линейной комбинации конечного числа основных решений этого уравнения.*

Пусть теперь $Z(t)$ — решение уравнения (3), определенное в правой полукрестности точки $t = 0$, и $Z_{rmv}(t)$ — основное решение с максимальным ростом при $t \rightarrow +0$, фигурирующее в указанном в теореме 1 представлении для $Z(t)$. Тогда

$$Z(t) = t^{\rho_{rv}} \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right), \quad (15)$$

где $M_m(\ln t)$ — многочлен степени m относительно $\ln t$ с векторными коэффициентами, а $v(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$ — вектор-функция с компонентами, принадлежащими $L(0, c)$.

Будем говорить, что вектор-функция $X(t)$, определенная на $0 < t < b$, принадлежит классу A , если она представима в виде

$$X(t) = t^\rho \left(M_k(\ln t) + \int_0^t \omega(\xi) d\xi \right),$$

где ρ — постоянная, $M_k(\ln t)$ — многочлен степени k относительно $\ln t$ с векторными коэффициентами, $\omega(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Из (15) следует, что любое определенное в правой полуокрестности точки $t = 0$ решение со степенным ростом при $t \rightarrow +0$ уравнения (3) принадлежит классу A .

2. Решения основного уравнения в классе A . Необходимые условия. Будем искать решения уравнения (1) на интервале $(0, c)$ в виде

$$X(t) = t^\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right), \quad (16)$$

где ρ — подлежащая определению постоянная, многочлен с подлежащими определению векторными коэффициентами

$$M_m(\ln t) = \frac{\ln^m t}{m!} W_0 + \frac{\ln^{m-1} t}{(m-1)!} W_1 + \dots + W_m, \quad (17)$$

$v(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Подставив (16) в (1) и поделив обе части на t^ρ , получим

$$\begin{aligned} \rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right) + t \frac{d}{dt} M_m(\ln t) + tv(t) = \\ = \lambda^\rho (A + \alpha(t)) \left(M_m(\ln \lambda t) + \int_0^{\lambda t} v(\xi) d\xi \right) + \\ + t^{-\rho} f \left(t, t^\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right), [\psi(t)]^\rho \left(M_m(\ln \psi(t)) + \int_0^{\psi(t)} v(\xi) d\xi \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из условий d) и e) следует

$$\begin{aligned} 0 \leq |t^{-\rho}| \left\| f \left(t, t^\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right), [\psi(t)]^\rho \left(M_m(\ln \psi(t)) + \int_0^{\psi(t)} v(\xi) d\xi \right) \right) \right\| \leq \\ \leq |t^{-\rho} q(t) t^\rho| \left\| M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ для векторов и матриц, элементы которых при $t \rightarrow +0$ обладают соответствующим свойством. Таким образом, последнее слагаемое в правой части (18) есть $o(1)$, а также

$$\int_0^t v(\xi) d\xi = o(1), \quad \int_0^{\lambda t} v(\xi) d\xi = o(1), \quad \alpha(t) = O(t^\varepsilon).$$

Тогда при $m = 0$ равенство (18) принимает вид

$$\rho(W_0 + o(1)) + tv(t) = \lambda^\rho (A + O(t^\varepsilon))(W_0 + o(1)) + o(1),$$

откуда, переходя к пределу при $t \rightarrow +0$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} tv(t) = (\lambda^\rho A - \rho E) W_0. \quad (19)$$

В силу (19) вектор-функция $tv(t)$ имеет предел при $t \rightarrow +0$. Однако, если этот предел отличен от 0, то $v(t) \notin L_{(n,1)}(0, c)$. Действительно, в этом слу-

из (19) следует

$$(\lambda^p A - \rho E) W_0 = 0. \quad (20)$$

Но (20) совпадает с (7). Следовательно, ρ должно быть корнем характеристического уравнения (9), связанного с собственным значением s_r (индекс r означает, что это собственное значение принадлежит $p_r \times p_r$ — жордановой клетке матрицы $\tilde{A}$, подобной A), а W_0 — собственный вектор матрицы A , соответствующий этому собственному значению. Из (20) и (7) следует теперь, что можно положить

$$W_0 = V_0. \quad (21)$$

Для $m > 0$ согласно (18) должно быть

$$\rho (M_m(\ln t) + o(1)) + M_{m-1}(\ln t) = \lambda^p (A + O(t^\varepsilon)) (M_m(\ln \lambda t) + o(1)) + o(1). \quad (22)$$

Но из (17) и (20) для $m = 1, 2, \dots$ последовательно следует

$$\begin{aligned} \rho M_m(\ln t) + M_{m-1}(\ln t) - \lambda^p A M_m(\ln \lambda t) &\equiv (\lambda^p A - \rho E) W_m - \\ &- (1 - \rho \ln \lambda) W_{m-1} + \lambda^p A \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2!} W_{m-2} + \dots + \frac{\ln^m \lambda}{m!} W_0 \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Переходя теперь в (22) к пределу при $t \rightarrow +0$, в силу (23) получим

$$(\lambda^p A - \rho E) W_m = (1 - \rho \ln \lambda) W_{m-1} - \lambda^p A \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2!} W_{m-2} + \dots + \frac{\ln^m \lambda}{m!} W_0 \right). \quad (24)$$

Для $\rho = \rho_{rv}$ в силу (21) и (9) из (24) следует

$$W_m = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, p_r - 1, \quad (25)$$

а если $s_r = 1/e \ln \lambda$ и $\rho = 1/\ln \lambda$, то и

$$W_{p_r} = V_{p_r}. \quad (25')$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Порядок роста при $t \rightarrow +0$ решений уравнения (1), принадлежащих классу A , не может отличаться от порядка роста при $t \rightarrow +0$ решений укороченного уравнения (3).*

3. Решения основного уравнения в классе A . Достаточные условия. Пусть ρ_{rv} — корень характеристического уравнения (9), число $m \in 0, 1, \dots, p_r - 1$ (или если $\rho = 1/\ln \lambda$, $m = 0, 1, \dots, p_r$) и $P_m(\ln \lambda)$ — многочлен степени m относительно $\ln t$ вида (5) с векторными коэффициентами, удовлетворяющими (7) и (9) (для $m = p_r$ — (15)). Тогда, как показано при доказательстве теоремы 2, принадлежащее классу A решение уравнения (1) следует искать в виде

$$X(t) = t^{\rho_{rv}} \left(P_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right), \quad 0 < t < c, \quad (26)$$

где вектор-функция $v(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$ подлежит определению.

Подставив (26) в уравнение (1) и поделив обе части на $t^{\rho_{rv}}$, в силу (20) — (25) ((25')) получим уравнение для определения $v(t)$:

$$\begin{aligned} t v(t) &= \lambda^p \alpha(t) P_m(\ln \lambda t) + F \left(t, \int_0^t v(\xi) d\xi \right) + \lambda^p \alpha(t) \int_0^{\lambda t} v(\xi) d\xi + \\ &+ \lambda^p \left[(A - \rho \lambda^{-p} E) \int_0^{\lambda t} v(\xi) d\xi - \rho \lambda^{-p} \int_0^t v(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Для упрощения записи в (27) опущены индексы у ρ и обозначено

$$F\left(t, \int_0^t v(\xi) d\xi\right) = \\ = t^{-\rho} f\left(t, t^{\rho}\left(P_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi\right), [\psi(t)]^{\rho}\left(P_m(\ln \psi(t)) + \int_0^{\psi(t)} v(\xi) d\xi\right)\right). \quad (28)$$

Если в условии а) предельная матрица $A \neq 0$, то (27) — нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра с сингулярным ядром в главной линейной части.

Умножим обе части уравнения (27) на $\lambda^{-\rho} t^{\delta}$, δ — действительный параметр, и сделаем замену переменных

$$t = ce^{-v}, \quad \xi = ce^{-\theta}, \quad (29)$$

положив при этом

$$t^{1+\delta} v(t) = (ce^{-v})^{1+\delta} v'(ce^{-v}) = w(v). \quad (30)$$

Тогда уравнение (27) примет вид

$$\lambda^{-\rho} w(v) = (ce^{-v})^{\delta} \alpha (ce^{-v}) P_m(\ln \lambda c - v) + \lambda^{-\rho} (ce^{-v})^{\delta} F\left(ce^{-v}, \int_v^{+\infty} w(\theta) (ce^{-\theta})^{-\delta} d\theta\right) + \\ + \alpha (ce^{-v}) \int_{v+\gamma}^{+\infty} e^{-\delta(v-\theta)} w(\theta) d\theta + (A - \rho \lambda^{-\rho} E) \int_{v+\gamma}^{+\infty} e^{-\delta(v-\theta)} w(\theta) d\theta - \\ - \rho \lambda^{-\rho} \int_v^{v+\gamma} e^{-\delta(v-\theta)} w(\theta) d\theta, \quad (31)$$

где $\gamma = -\ln \lambda$.

Обозначим

$$f_*(v) = (ce^{-v})^{\delta} \alpha (ce^{-v}) P_m(\ln \lambda c - v), \quad (32)$$

$$\Phi(v, w(v)) = \lambda^{-\rho} (ce^{-v})^{\delta} F\left(ce^{-v}, \int_v^{+\infty} w(\theta) (ce^{-\theta})^{-\delta} d\theta\right), \quad (33)$$

$$k_0(v - \theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta \leq v, \\ -\rho \lambda^{-\rho} e^{-\delta(v-\theta)} E & v < \theta \leq v + \gamma, \\ e^{-\delta(v-\theta)} (A - \rho \lambda^{-\rho} E), & v + \gamma < \theta < +\infty, \end{cases} \quad (34)$$

$$k_1(v, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta \leq v + \gamma, \\ c^{-\varepsilon} e^{-\delta(v-\theta)} \alpha (ce^{-v}), & v + \gamma < \theta < +\infty, \end{cases} \quad (35)$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, фигурирующая в условии а). Тогда уравнение (31) примет вид

$$\lambda^{-\rho} w(v) = f_*(v) + \int_0^{+\infty} k_0(v - \theta) w(\theta) d\theta + c^{\varepsilon} \int_0^{+\infty} k_1(v, \theta) w(\theta) d\theta + \Phi(v, w(v)). \quad (36)$$

Рассмотрим пространство C_0^+ вектор-функций $f \in R^n$ с непрерывными на $[0, +\infty)$ компонентами $x_k(v)$ такими, что $\lim_{v \rightarrow +\infty} x_k(v) = 0$.

Пусть

$$\delta \in (-\varepsilon/2, -\varepsilon/4), \quad (37)$$

где $\varepsilon > 0$ — константа из условия а). В силу (29) и условия а) $\|\alpha(ce^{-v})\| = O(c^{\varepsilon} e^{-\varepsilon v})$ при $v \rightarrow +\infty$, откуда

$$0 \leq \lim_{v \rightarrow +\infty} \|f_*(v)\| = c^{\varepsilon/2} \lim_{v \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon v/2} \|P_m(\ln \lambda c - v)\| = 0$$

и, следовательно, $f_*(v) \in C_0^+$.

Рассмотрим предварительно уравнение

$$\lambda^{-\rho} \omega(v) = f(v) + \int_0^{+\infty} k_0(v - \theta) \omega(\theta) d\theta, \quad 0 < v < +\infty, \quad (38)$$

с ядром (34) — уравнение типа Винера—Хопфа в векторной форме. С помощью методов, развитых в [6], в работе [2] показано, что можно указать удовлетворяющее (37) значение δ такое, что уравнение (38) будет разрешимо в C_0^+ , и притом однозначно, для любой $f(v) \in C_0^+$.

Обозначим через K_0 и K_1 определенные на C_0^+ интегральные операторы с ядрами (34) и (35). Тогда уравнение (36) примет вид

$$(\lambda^\rho I - K_0) \omega = f_* + c^\varepsilon K_1 \omega + \Phi(v, \omega). \quad (36')$$

В силу условия а) и (29)

$$L_c = \sup_{0 < v < \infty} c^{-\varepsilon} \|\alpha(ce^{-v})\| = \sup_{0 < v < \infty} e^{-\varepsilon v} \left\| \frac{\alpha(ce^{-v})}{(ce^{-v})^\varepsilon} \right\| < L < +\infty$$

и равномерно по c

$$\|K_1\|_{C_0^+} = \sup_{0 < v < \infty} \int_0^\infty \|k_1(v, \theta)\| d\theta \leq L \sup_{0 < v < \infty} \int_{v+\gamma}^\infty e^{-\delta(v-\theta)} d\theta = \frac{L}{|\delta|} e^{\delta\gamma} < +\infty.$$

С другой стороны, равномерно по c для $\omega \in C_0^+$ в силу а)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} \|K_1 \omega\| = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\| c^{-\varepsilon} \alpha(ce^{-v}) \int_{v+\gamma}^\infty e^{-\delta(v-\theta)} \omega(\theta) d\theta \right\| \leq \\ &\leq \sup_{0 < v < \infty} \|\omega(v)\| \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon v} \int_{v+\gamma}^\infty e^{-\delta(v-\theta)} d\theta = \sup_{0 < v < \infty} \|\omega(v)\| \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{|\delta|} \exp(\delta\gamma - \varepsilon v) = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, оператор K_1 отображает C_0^+ в себя. Наконец, из (28) — (30) и (33) в силу условий d) и e)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\Phi(v, \omega(v))\| = |\lambda^{-\rho}| (ce^{-v})^\delta \left\| F\left(ce^{-v}, \int_v^\infty (ce^{-\theta})^{-\delta} \omega(\theta) d\theta\right) \right\| = \\ &= |\lambda^{-\rho} t^{\delta-\rho}| \left\| f\left(t, t^\rho \left(P_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi\right), [\Psi(t)]^\rho \left(P_m(\ln \Psi(t)) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\Psi(t)} v(\xi) d\xi\right)\right) \right\| \leq |\lambda^{-\rho}| t^\delta q(t) \left\| P_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi) d\xi \right\|. \quad (39) \end{aligned}$$

При $v \rightarrow +\infty$ в силу (29) $t \rightarrow +0$. С другой стороны, в силу условия d) и (37) имеем

$$t^\delta q(t) = O(t^{\varepsilon/2}) \quad \text{при } t \rightarrow +0. \quad (40)$$

Из (39) и (40) следует

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|\Phi(v, \omega(v))\| = 0,$$

т. е. для $\omega \in C_0^+$ и $\Phi(v, \omega(v)) \in C_0^+$.

В силу (34)

$$\begin{aligned} \|K_0\|_{C_0^+} &= \|k_0\|_L = \int_{-\infty}^{+\infty} \|k_0(x)\| dx \leq \|A - \rho \lambda^{-\rho} E\| \int_{-\infty}^{-\gamma} e^{-\delta x} dx + \\ &+ |\rho| |\lambda^{-\rho}| n \int_{-\gamma}^0 e^{-\delta x} dx = \frac{1}{|\delta|} (\|A - \rho \lambda^{-\rho} E\| e^{\delta\gamma} + |\rho| |\lambda^{-\rho}| n (1 - e^{\delta\gamma})) < +\infty, \end{aligned}$$

откуда для определенного на C_0^+ оператора $B = \lambda^{-p}I - K_0$

$$\|B\|_{C_0^+} \leq |\lambda^{-p}| + \|K_0\| < +\infty$$

и, следовательно, аддитивный на C_0^+ оператор B ограничен на C_0^+ .

Пусть теперь $v \in C_0^+$ и $f = Bv$. Тогда $0 \leq \|f(v)\| \leq \|B\| \|v(v)\| \rightarrow 0$ при $v \rightarrow +\infty$, т. е. оператор B отображает C_0^+ в себя. Но тогда из однозначной разрешимости в C_0^+ уравнения (38) для любой $f(v) \in C_0^+$ следует, что оператор B осуществляет взаимно однозначное отображение всего пространства C_0^+ на себя и в силу теоремы Банаха обратный оператор B^{-1} существует, аддитивен и ограничен на C_0^+ . Из (36') имеем

$$\omega = B^{-1}f_* + c^e B^{-1}K_1\omega + B^{-1}\Phi(v, \omega(v)). \quad (41)$$

Рассмотрим на C_0^+ оператор

$$H\omega = B^{-1}f_* + c^e B^{-1}K_1\omega + B^{-1}\Phi(v, \omega(v)). \quad (42)$$

При этом по доказанному $H\omega \in C_0^+$ для любого $\omega \in C_0^+$. Тогда для любых $\omega_1, \omega_2 \in C_0^+$

$$\begin{aligned} \|H\omega_1 - H\omega_2\| &\leq c^e \|B^{-1}\| \|K_1\| \|\omega_1 - \omega_2\| + \\ &+ \|B^{-1}\| \|\Phi(v, \omega_1(v)) - \Phi(v, \omega_2(v))\|. \end{aligned} \quad (43)$$

С учетом того, что в (26) ρ и $P_m(\ln t)$ фиксированы, из (28) — (30) и (33) в силу условия е) получим

$$\begin{aligned} \|\Phi(v, \omega_1(v)) - \Phi(v, \omega_2(v))\| &= |\lambda^{-p}| (ce^{-v}) \left\| F(ce^{-v}, \int_v^\infty (ce^{-\theta})^{-\delta} \omega_1(\theta) d\theta) - \right. \\ &- \left. F(ce^{-v}, \int_v^\infty (ce^{-\theta})^{-\delta} \omega_2(\theta) d\theta) \right\| \leq |\lambda^{-p}| t^\delta q(t) \left\| \int_0^t (v_1(\xi) - v_2(\xi)) d\xi \right\| \leq \\ &\leq |\lambda^{-p}| q(t) t^{1+\delta} \|v_1(t) - v_2(t)\| = |\lambda^{-p}| q(ce^{-v}) \|\omega_1 - \omega_2\|. \end{aligned}$$

Обозначим $q_c = \max_{0 \leq t \leq c} q(t)$. В силу условия е) $q_c \rightarrow 0$ при $c \rightarrow 0$ и из (43) следует

$$\|H\omega_1 - H\omega_2\| \leq \alpha_c \|\omega_1 - \omega_2\|, \quad (44)$$

где для достаточно малого $c > 0$

$$\alpha_c = c^e \|B^{-1}\| \|K_1\| + |\lambda^{-p}| q_c \|B^{-1}\| \leq \alpha < 1.$$

Из (44) следует, что уравнение (41), а вместе с ним и (31), имеет, и притом единственное, решение $\omega_*(v) \in C_0^+$. Обозначим $\rho = \sup_{0 < v < \infty} \|\omega_*(v)\|$ и в соответствии с (29), (30) для фиксированного допустимого значения δ рассмотрим определенную на интервале $(0, c)$ вектор-функцию $v_*(t) = v_*(ce^{-v}) = (ce^{-v})^{-(1+\delta)} \omega_*(v)$, являющуюся единственным решением уравнения (27). Полагая $c < 1$, в силу (36) получаем

$$\|v_*(t)\|_{L_{(n,1)}(0,c)} = \int_0^c \|v_*(t)\| dt \leq \rho \int_0^b t^{-(1+\delta)} dt < \frac{4\rho}{\varepsilon} c^{\varepsilon/4}$$

и, следовательно, вектор-функция $v_*(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть для уравнения (1) имеют место условия а) — г), фигурирующая в условии а) $(n \times n)$ -матрица $A \neq 0$ и матрица $\tilde{A}$, подобная A , имеет каноническую жорданову форму, содержащую $p_r \times p_r$ клетки, $r = 1, 2, \dots, l$; $p_1 + p_2 + \dots + p_l = n$, соответствующие собственным

значениям s_r матрицы A . Тогда каждому собственному значению s_r , $s_r \neq 0$, $s_r \neq 1/e \ln \lambda$, матрицы A на интервале $0 < t < b$ соответствует бесконечная последовательность решений уравнения (1)

$$X_{rmv}(t) = t^{p_{rv}} \left(P_{rmv}(\ln t) + \int_0^t v_{rmv}(\xi) d\xi \right), \quad m = 0, 1, \dots, p_r - 1; \\ v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (45)$$

где p_{rv} — корни характеристического уравнения (10), соответствующие им многочлены $P_{rmv}(\ln t)$ имеют вид (5) с векторными коэффициентами, определяемыми уравнениями (7), (9), вектор-функции $v_{rmv}(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$. В тех же обозначениях собственному значению $s_r = 0$ соответствует конечная последовательность решений уравнения (1)

$$X_{rm0}(t) = P_{rm0}(\ln t) + \int_0^t v_{rm0}(\xi) d\xi, \quad m = 0, 1, \dots, p_r - 1. \quad (46)$$

Собственному значению $s_r = 1/e \ln \lambda$ соответствует бесконечная последовательность решений уравнения (1) вида (45), где $v = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$, и две конечные последовательности решений

$$X_{rm0}(t) = t^{1/\ln \lambda} \left(P_{rm0}(\ln t) + \int_0^t v_{rm0}(\xi) d\xi \right), \quad m = 0, 1, \dots, p_r - 1, \quad (47)$$

$$X_{rm1}(t) = t^{1/\ln \lambda} \left(P_{r(m+1)0}(\ln t) - P_{rm0}(\ln t) + \int_0^t v_{rm1}(\xi) d\xi \right), \\ m = 0, 1, \dots, p_r - 1.$$

Если в уравнении (1) предельная матрица $A = 0$, то соответствующее линейное уравнение (3) принимает вид

$$tZ'(t) = 0. \quad (3')$$

Его основными решениями является произвольная система линейно независимых векторов

$$V_1, V_2, \dots, V_n. \quad (48)$$

Для матрицы $A = 0$: $l = n$, $p_r \equiv 1$, $s_r \equiv 0$, $r = 1, 2, \dots, n$, и уравнение (27) имеет ядро с ослабленной особенностью. Отсюда следует такая теорема.

Теорема 4. Пусть для уравнения (1) имеют место условия а)–г) и фигурирующая в условии а) предельная матрица $A = 0$. Тогда уравнение (1) имеет в классе A конечную последовательность решений

$$X_r(t) = V_r + \int_0^t v_r(\xi) d\xi, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (49)$$

где V_r — постоянный вектор из (48), а $v_r(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Будем говорить, что вектор-функции X и Y асимптотически эквивалентны при $t \rightarrow \alpha + 0$, если $\lim_{t \rightarrow \alpha + 0} \|X - Y\| / \|X\| = 0$, или $\lim_{t \rightarrow \alpha + 0} \|Y\| / \|X\| = 1$.

Следствие 1. В условиях теорем 3, 4 для каждого определенного на интервале $(0, b)$ решения уравнения (3), (3') существует на $(0, b)$ решение уравнения (1), асимптотически эквивалентное ему при $t \rightarrow +0$.

З а м е ч а н и е. Аналогично тому, как это сделано в [4] для линейной системы, возможно обобщение на случай, когда условие f) заменено условием f*) $\varphi(t) \in C^1(0, c)$ и представимо в виде $\varphi(t) = \lambda t(1 + \delta(t))$, $0 < t < c$, $0 < \lambda < 1$, $t\delta(t) = O(t^2)$, $\delta'(t) = O(1)$, $t \rightarrow +0$.

4. Одноточечная задача. В терминах уравнения (1) точку $\alpha \in [0, b)$ будем называть особой для функций запаздывания, если при всех $t > \alpha$ имеет место $\varphi(t) > \alpha$, $\psi(t) > \alpha$. В силу условия с) точка $t = 0$

является особой для функций запаздывания уравнения (1). Определенное на интервале (α, b) решение $\tilde{X}(t)$ уравнения (1) будем называть решением одноточечной задачи. Если существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+0} \tilde{X}(t) = \tilde{X}_\alpha \neq 0, \quad (50)$$

то решение $\tilde{X}(t)$ будем называть регулярным решением одноточечной задачи, или решением одноточечной начальной задачи с начальным условием

$$\tilde{X}(\alpha) = \tilde{X}_\alpha. \quad (51)$$

Решения (45) уравнения (1) будут регулярными лишь для $\operatorname{Re} \rho_{rv} = 0$, $m = 0$, для (46) — при $m = 0$. Если в условии а) предельная матрица $A = 0$, то все определенные на $(0, b)$ решения уравнения (1) будут регулярными решениями одноточечной задачи.

5. Двусторонние решения. Изучим решения нелинейной системы с запаздывающим аргументом

$$X'(t) = A(t)X(\varphi(t)) + f(t, X(t), X(\psi(t))), \quad -\infty < t < b \leq +\infty, \quad (52)$$

где: А) $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ непрерывна на $(-\infty, b)$ и представима в виде $A(t) = A + \alpha(t)$, $\|\alpha(t)\| = O(e^{\varepsilon t})$, $\varepsilon > 0$, $t \rightarrow -\infty$;

В) вектор-функция $f(t, X, Y)$ непрерывна на $(-\infty, b) \times R^n \times R^n$;

С) отклонения $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывны на $(-\infty, b)$ и $\varphi(t) \leq t, \psi(t) \leq t$. Пусть далее существует точка $c \leq b$ такая, что

Д) $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $-\infty < t < c$;

Е) $\|f(t, X_1, Y_1) - f(t, X_2, Y_2)\| \leq q(t)\|X_1 - X_2\|$, $-\infty < t < c$, где функция $q(t)$ непрерывна на $-\infty < t < c$ и удовлетворяет условию $q(t) = O(e^{\varepsilon t})$, $\varepsilon > 0$, $t \rightarrow -\infty$;

Ф) $\varphi(t) = t - \tau$, $-\infty < t < c$, где постоянная $\tau > 0$;

Г) при $t \geq c$ матрица $A(t) = A + \alpha(t)$, вектор-функция $f(t, X, Y)$ и отклонения $\varphi(t), \psi(t)$ допускают существование, единственность и продолжимость на $c \leq t < b$ решения основной начальной задачи для уравнения (52) с произвольной непрерывной на $(-\infty, c]$ начальной вектор-функцией.

Пусть α_0 — особая точка для функций запаздывания уравнения (52) (если уравнение (52) не имеет таких точек, то $\alpha_0 = -\infty$). Решение уравнения (52), определенное на интервале (α_0, b) , будем называть двусторонним решением этого уравнения (см. с [7]).

При решении прикладных задач крайне редко оказывается нужным знать всю предысторию процесса и систему (52) естественно изучать лишь на участке $[t_0, b)$, где t_0 — фиксированная начальная точка. Тогда на связанном с точкой t_0 начальном множестве задают непрерывную начальную вектор-функцию $\sigma(t)$ и рассматривают основную начальную задачу с начальными условиями $X(t_0) = X_0 = \sigma(t_0)$; $X(\varphi(t)) \equiv \sigma(\varphi(t))$, если $\varphi(t) < t_0$; $X(\psi(t)) \equiv \sigma(\psi(t))$, если $\psi(t) < t_0$. Произвол выбора начальной функции очень удобен при решении многих задач: проблемы существования и единственности решений, продолжимости, при исследовании устойчивости в качестве возмущенных решений естественно рассматривать решения основной начальной задачи, связанной с произвольной начальной точкой. Однако для многих прикладных задач чужеродная начальная функция, не связанная с системой (52), моделирующей процесс, может оказаться серьезной помехой при построении модели, а требование, чтобы начальная функция удовлетворяла системе (52), приводит к двустороннему решению.

Традиционно для непосредственного доказательства существования двусторонних решений используется метод последовательных приближений. При этом (см., например, [7—11]) в той или иной форме фигурирует известная оценка $1/e$, практически делающая результат применимым лишь для достаточно малых отклонений. В терминах линейной стационарной системы

$$Z'(t) = AZ(t - \tau), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (53)$$

это ограничение имеет вид $\tau \|A\| < 1/e$. Однако, как известно, каждому отличному от нуля собственному значению матрицы A соответствует бесконечномерное пространство двусторонних решений уравнения (53) (нулевому собственному значению — n -мерное пространство) без всяких ограничений на величины $\|A\|$ и τ . Это свидетельствует о том, что упомянутое ограничение связано не с существом задачи, а лишь с методом ее решения. Но и для достаточно малых запаздываний этот подход позволяет получить лишь конечномерное многообразие решений. Задача, рассмотренная в пп. 2, 3, позволяет подойти к изучению многообразия двусторонних решений уравнения (52) в целом.

Случай 1. $\alpha_0 > -\infty$. Замена переменных $t = x + \alpha_0$, $X(t) = X(x + \alpha_0) = Y(x)$ приводит уравнение (52) к уравнению вида (1)

$$xY'(x) = xA(x + \alpha_0)Y(\Phi(x)) + xf(x + \alpha_0, Y(x), Y(\Psi(x))), \\ 0 < x < b - \alpha_0, \quad (54)$$

где $\Phi(x) = \varphi(x + \alpha_0) - \alpha_0$, $\Psi(x) = \psi(x + \alpha_0) - \alpha_0$. В силу А)—Г) для уравнения (54) выполнены условия а)—г), кроме, может быть, условия β). Но в рассматриваемом случае $\lim_{x \rightarrow +0} xA(x + \alpha_0) = 0$ и последнее несущественно

(укороченное уравнение (3')) не зависит от отклонения). Уравнение (27) для определения возмущений решений укороченного уравнения имеет регулярное ядро. Таким образом, структура многообразия двусторонних решений уравнения (52) на участке $-\infty < \alpha_0 < t < b$ определяется теоремой 4: двусторонние решения являются регулярными решениями односточечной задачи с начальной точкой $t = \alpha_0$.

Случай 2. $\alpha_0 = -\infty$. Будем говорить, что вектор-функция $X(t)$, определенная на $-\infty < t < b$, принадлежит классу B , если она представима в виде

$$X(t) = e^{\rho t} \left(P_k(t) + \int_{-\infty}^t \omega(\xi) d\xi \right),$$

где ρ — постоянная, $P_k(t)$ — многочлен степени k с векторными коэффициентами, $\omega(t) \in L_{(n,1)}(-\infty, c)$.

Замена переменных $t = \ln x$, $X(t) = X(\ln x) = Y(x)$ приводит уравнение (52) к уравнению вида (1)

$$xY'(x) = A(\ln x)Y(\Phi(x)) + f(\ln x, Y(x), Y(\Psi(x))), \quad 0 < x < e^b, \quad (55)$$

где $\Phi(x) = \exp \varphi(\ln x)$, $\Psi(x) = \exp \psi(\ln x)$. В силу А)—Г) уравнение (55) удовлетворяет на $(0, e^b)$ условиям а)—г) (в условии β) $\lambda = e^{-\tau}$) и, следовательно, структура многообразия принадлежащих классу B двусторонних решений уравнения (52) на интервале $(-\infty, b)$ определяется теоремой 3, если предельная матрица A в условии А) отлична от нулевой, и теоремой 4 — в противном случае. Следствие 1 позволяет утверждать, что справедливы следующие теорема.

Теорема 5. Пусть для уравнения (52) выполнены условия А)—Г). Тогда каждому определенному на интервале $(-\infty, b)$ решению стационарного уравнения (53), где A — фигурирующая в условии А) предельная матрица (случай $A = 0$ не исключается), соответствует определенное на $(-\infty, b)$ решение уравнения (52), асимптотически эквивалентное ему при $t \rightarrow -\infty$.

1. Норкин С. Б. О бесконечномерном многообразии двусторонних решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Tenth Int. Conf. Nonlinear Oscillations. (Varna, September, 1984). Abstracts.— Sofia, 1984.— P. 146.
2. Норкин С. Б. Структура решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в окрестности особой точки // Práce a štúdie vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, mat.-fyz.— 1980.— 3.— P. 27—46.
3. Норкин С. Б. Структура решений трехчленного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в окрестности особой точки // Там же.— 1980.— 3.— P. 47—54.

4. Норкин С. Б. О двусторонних решениях линейной системы с асимптотически постоянными коэффициентами и запаздыванием // Czech. Math. J.— 1983.— 33, № 108.— P. 58—69.
5. Норкин С. Б. Пространство двусторонних решений с экспоненциальным ростом при $t \rightarrow -\infty$ линейной системы с асимптотически постоянной матрицей и запаздыванием // Исслед. по теории дифференц. уравнений.— М. : Моск. автомоб.-дор. ин-т, 1986.— С. 27—34.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук.— 1958.— 13, вып. 2.— С. 3—72.
7. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.
8. Dantine N. Application de la methode des approximations successive á l'intégration d'une équation différentielle aux differences, I, II, III // Bull. Soc. Roy. sci. Liège.— 1949.— 18, N 8—10.— P. 363—374.— 18, N 11.— P. 445—461.— 1950.— 19, N 2.— P. 119—130.
9. Рябов Ю. А. Применение метода малого параметра Ляпунова — Пуанкаре в теории систем с запаздыванием // Инжен. журн.— 1961.— 1, N 2.— С. 3—15.
10. Турдиев Т. Аналитические решения некоторых классов линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом.— 1967.— 4.— С. 85—95.
11. Smitalová K. Existence of complete solutions of linear differential equations with delays // Acta Math. Univ. Comen.— 1982.— 41.— P. 189—193.

Моск. автомоб.-дор. ин-т

Получено 21.10.85,
после доработки — 19.02.86