УДК 512.83

А. Г. Мазко

Полуобращение и свойства инвариантов матриц

В [1] изучены некоторые свойства матричного выражения

$$M = A - AB(CAB)^{+}CA, \tag{1}$$

где A, B и C — комплексные матрицы, размеры которых допускают произведение $L = CAB$, L^{+} — псевдообратная матрица, однозначно определяемая системой Пенроуза [2].

В настоящей работе установлена связь между рангами матриц A, L и M в предположении, что L^{+} — любая полуобратная матрица, удовлетворяющая линейному уравнению

$$LL^{+}L = L. \tag{2}$$

Если $A = A^{*}$ — эрмитова матрица, то, полагая $C = B^{*}$ и выделяя эрмитово решение L^{+}, определяем также зависимость сигнатур этих матриц.

Напомним, что ранг (rang) и сигнатура (sgn) эрмитовой $n \times n$-матрицы A являются инвариантами соответствующей эрмитовой формы в законе инерции Сильвестра и определяются в виде $\operatorname{rang} A = n - \nu(A) = p(A) + q(A)$, $\operatorname{sgn} A = p(A) - q(A)$, где $p(A)$, $q(A)$ и $\nu(A)$ — соответственно количество положительных, отрицательных и нулевых собственных значений A с учетом кратностей [3].

Теорема. *Если размеры матриц A, B и C допускают произведение CAB, то для любой полуобратной матрицы $(CAB)^+$ выполнено равенство*

$$\operatorname{rang}(CAB) = \operatorname{rang} A - \operatorname{rang}[A - AB(CAB)^+ CA]. \tag{3}$$

Если $A = A^*$ и $C = B^*$, то для любой эрмитовой полуобратной матрицы $(B^*AB)^+$ наряду с (3) выполнено равенство

$$\operatorname{sgn}(B^*AB) = \operatorname{sgn} A - \operatorname{sgn}[A - AB(B^*AB)^+ B^*A]. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть P, Q и Δ — квадратные неособенные матрицы такие, что

$$PCABQ = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang}(CAB) = \operatorname{rang}\Delta = t \neq 0.$$

Размеры A, B, C, P, Q и Δ обозначим через $n \times m$, $m \times s$, $k \times n$, $k \times k$, $s \times s$ и $t \times t$ соответственно.

Операция полуобращения обладает следующими свойствами [2]:

$$(PLQ)^+ = Q^{-1}L^+P^{-1}, \quad \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & U \\ V & W \end{bmatrix},$$

где U, V и W — произвольные блоки подходящих размеров. Используя эти соотношения, преобразуем выражение (1) к виду

$$M = A - A\hat{B}(\hat{C}A\hat{B})^{-1}\hat{C}A - A\tilde{B}S\tilde{C}A, \tag{5}$$

где

$$\hat{B} = BQ\begin{bmatrix} I_t \\ V\Delta \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = BQ\begin{bmatrix} 0 \\ I_{s-t} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [I_t, \Delta U]PC, \quad \tilde{C} = [0, I_{k-t}]PC,$$

$S = W - V\Delta U$, I_t — единичная матрица порядка t. При этом выполнены равенства $\hat{C}A\hat{B} = \Delta$, $\hat{C}A\tilde{B} = 0$, $\tilde{C}A\hat{B} = 0$, $\tilde{C}A\tilde{B} = 0$, $\hat{C}M = 0$, $M\hat{B} = 0$, $\tilde{C}M = \tilde{C}A$, $M\tilde{B} = A\tilde{B}$.

Пусть $B^\perp$ и $C^\perp$ — произвольные матрицы такие, что $\operatorname{rang} B_0 = m$, $\operatorname{rang} C_0 = n$, где

$$B_0 = [\hat{B}, \tilde{B}, B^\perp], \quad C_0 = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \tilde{C} \\ C^\perp \end{bmatrix}.$$

Тогда произведение

$$C_0MB_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{C}AB^\perp \\ 0 & C^\perp A\tilde{B} & C^\perp MB^\perp \end{array}\right] \tag{6}$$

сохраняет ранг матрицы M. В то же время

$$C_1AB_1 = \left[\begin{array}{c|cc} \Delta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{C}AB^\perp \\ 0 & C^\perp A\tilde{B} & C^\perp MB^\perp \end{array}\right], \tag{7}$$

где $\operatorname{rang} B_1 = m$, $\operatorname{rang} C_1 = n$,

$$B_1 = \left[\hat{B}, \tilde{B}, B^\perp - \hat{B}\Delta^{-1}\hat{C}AB^\perp - \frac{1}{2}\tilde{B}S\tilde{C}AB^\perp\right],$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \ddot{C} \\ C^{\perp} - C^{\perp} A \hat{B} \Delta^{-1} \hat{C} - \frac{1}{2} C^{\perp} A \tilde{B} S \check{C} \end{bmatrix}.$$

Сопоставляя (6) и (7), видим, что выполнено равенство (3).

Рассматривая случай симметрии $A = A^*$, $C = B^*$, в приведенных выкладках следует положить $P = Q^*$, $\Delta = \Delta^*$, $U = V^*$, $W = W^*$, $B_0 = C_0^*$, $B_1 = C_1^*$. При этом равенство (4) также вытекает из построений (6), (7) и теоремы инерции.

Если $CAB = 0$, то $L^+ = (CAB)^+$ — любая $s \times k$-матрица и равенства (3), (4) вытекают из соотношения

$$\begin{bmatrix} C \\ C^{\perp} \end{bmatrix} M [B, B^{\perp}] = \begin{bmatrix} C \\ C^{\perp} - \frac{1}{2} C^{\perp} ABL^+ C \end{bmatrix} A \left[B,\ B^{\perp} - \frac{1}{2} BL^+ CAB^{\perp} \right],$$

где $C^{\perp}$ и $B^{\perp}$ — выбраны так, чтобы левые и правые множители были матрицами полного ранга n и m соответственно. Теорема доказана.

Примечание. Если потребовать, чтобы наряду с (2) выполнялось второе соотношение системы Пенроуза $L^+ L L^+ = L^+$ (т. е. $L^{++} = L$), то матрица (1) представима в виде (5) при $S = 0$ и доказательство теоремы упрощается.

Следствие 1. *Произведение CAB сохраняет ранг матрицы A в том и только в том случае, когда $M = 0$. Так, при изучении матричного уравнения $CXB = D$ имеем критерий* $\operatorname{rang} X = \operatorname{rang} D \Leftrightarrow X^+ = BD^+C$.

Следствие 2. *Если матрица A представлена в блочном виде*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1$ *в том и только в том случае, когда выполнена система соотношений*

$$A_4 = A_3 A_1^+ A_2, \quad A_2 = A_1 A_1^+ A_2, \quad A_3 = A_3 A_1^+ A_1. \tag{9}$$

Для доказательства в следствии 1 нужно положить $B = [I_s, 0]^*$, $C = [I_k, 0]$, где $k \times s$ — размеры блока A_1. При этом

$$CAB = A_1, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & A_2 - A_1 A_1^+ A_2 \\ A_3 - A_3 A_1^+ A_1 & A_4 - A_3 A_1^+ A_2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что утверждение следствия 2 хорошо известно в случае, когда A_1 — квадратный невырожденный блок [3]. При этом система (9) сводится к одному равенству $A_4 = A_3 A_1^{-1} A_2$.

Следствие 3. *Ранг блок-строки $[A_1, A_2]$ можно вычислить по формуле* $\operatorname{rang} [A_1, A_2] = \operatorname{rang} A_1 + \operatorname{rang} (A_2 - A_1 A_1^+ A_2)$.

Доказательство вытекает из (3) при $B = [I_s, 0]$, $C = I_n$ и может быть использовано, например, в ранговых критериях управляемости Калмана и Симона—Миттера для линейных систем [4]. Аналогичные выражения можно получить для ранга блок-столбца и блочной матрицы (8), включающие полуобращение матриц меньших размеров.

Следствия 1—3 нацелены на рекуррентное понижение размерностей в задаче оценки ранга матрицы. В случае симметрии эти утверждения дополняются соответствующими соотношениями для сигнатур.

Приведем ряд результатов, вытекающих из теоремы при $A = A^*$, $C = B^*$. Числа $p(A)$, $q(A)$ и $\nu(A)$ полностью определяются значениями ранга и сигнатуры A: $p(A) = (\operatorname{rang} A + \operatorname{sgn} A)/2$, $q(A) = (\operatorname{rang} A - \operatorname{sgn} A)/2$, $\nu(A) = n - \operatorname{rang} A$. Отсюда с учетом (3), (4) имеем равенства $p(A) = p(L) + p(M)$, $q(A) = q(L) + q(M)$, $\nu(A) = \nu(M) - \operatorname{rang} L$.

С л е д с т в и е 4. *Равенства*

$$p(A) = p(B^*AB), \quad q(A) = q(B^*AB)$$

выполнены в том и только в том случае, когда $M = 0$.

Если B — квадратная неособенная матрица конгруэнтного преобразования $L = B^*AB$, то $L^+ = B^{-1}A^+B^{-1*}$, $M = 0$. В этом частном случае следствие 4 выражает закон инерции эрмитовых форм.

С л е д с т в и е 5. M — *отрицательно полуопределенная матрица ранга* μ *в том и только в том случае, когда* $p(A) = p(B^*AB)$, $q(A) = q(B^*AB) + \mu$.

С л е д с т в и е 6. M — *положительно полуопределенная матрица ранга* μ *в том и только в том случае, когда* $q(A) = q(B^*AB)$, $p(A) = p(B^*AB) + \mu$.

В следствиях 5 и 6 задача нахождения инвариантов матрицы A сводится к применению критериев знакоопределенности выражения M и не связана с какими-либо ограничениями на миноры A, подобными условиям теоремы Якоби [3]. В частности, если $n \times s$-матрица B выбрана так, что $B^*AB > 0$, то из неравенства $M \leqslant 0$ следует $p(A) = s$, $q(A) = \mu$. Аналогично при $B^*AB < 0$, $M \geqslant 0$ будем иметь $q(A) = s$, $p(A) = \mu$.

1. *Мазко А. Г.* К определению инвариантов эрмитовой и ранга прямоугольной матриц // Численно-аналитические методы исслед. динамики и устойчивости многомерных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 121—123.
2. *Zuhair Nashed M.* Generalized Inverses and Applications.— New York etc. : Academic Press, 1976.— 1054 p.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
4. *Simon I. D., Mitter S. K.* A theory of modal control. // Inf. and Control.— 1968.— **13**.— P. 316—353.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.06.86