УДК 517.55

П. В. Довбуш

К теореме Линделефа в $\mathbb{C}^n$

В настоящей статье уточняется теорема Линделефа для голоморфных функций многих комплексных переменных.

Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ с C^2-гладкой границей ∂D. Для любых $\alpha > 0$ и $\varepsilon \geqslant 0$ обозначим

$$D_\alpha^\varepsilon(\xi) = \{z \in \mathbb{C}^n : |(z - \xi, \nu_\xi)| < (1+\alpha)\,\delta_\xi(z), \quad |z - \xi|^2 < \alpha(\delta_\xi z))^{1+\varepsilon}\},$$

где $(.,.)$ — обычное эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, ν_ξ — вектор единичной внешней нормали к ∂D в точке ξ, $\delta_\xi(z) = \min\{d_\xi(z), \delta(z)\}$. Здесь $d_\xi(z)$ — евклидово расстояние от точки z до действительной касательной касательной плоскости $T_\xi = T_\xi(\partial D)$ к ∂D в точке ξ, а $\delta(z)$ — евклидово расстояние от точки z до ∂D.

Множество $D_\alpha^0(\xi)$ обозначим через $D_\alpha(\xi)$. Очевидно, что $D_\alpha^\varepsilon(\xi) \subset D_\alpha(\xi)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Будем говорить, что функция $f: D \to \mathbb{C}$ имеет K-предел a в точке $\xi \in \partial D$. если для любого $\alpha > 0$ и для любой последовательности точек $\{z^m\}$ из $D_\alpha(\xi)$, сходящейся к ξ, $f(z^m) \to a$ при $m \to \infty$ (см. [1, с. 83]). Функция $f: D \to \mathbb{C}$ имеет предел a вдоль нормали ν_ξ к ∂D в точке ξ, если $f(\xi - t\nu_\xi) \to a$ при $t \to 0$.

Обозначим через $H(D)$ алгебру всех функций, голоморфных в области D.

Для любой точки $z \in D$, достаточно близкой к ∂D, определена единственная точка $\xi(z) \in \partial D$ такая, что $|z - \xi(z)| = \delta(z)$.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$. Для любой действительной функции φ класса C^2 в области D ее формой Леви называется эрмитова квадратичная форма

$$L_z(\varphi, dz) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\, dz_\mu d\bar{z}_\nu.$$

Определение. *Функция $f \in H(D)$, где D — область в $\mathbb{C}^n$ с границей ∂D класса C^2, принадлежит классу $N(D)$, если найдется постоянная K такая, что для всех $z \in D$*

$$L_z(\log(1 + |f|^2), dz) \leqslant K \left\{\frac{|dz_T|^2}{\delta(z)} + \frac{|dz_N|^2}{(\delta(z))^2}\right\}, \tag{1}$$

где dz_T и dz_N — проекции вектора dz на комплексную касательную плоскость $T_{\xi(z)}^c = T_{\xi(z)} \cap iT_{\xi(z)}$ к ∂D в точке $\xi(z)$ и комплексную нормаль $N_{\xi(z)}^c$, $\mathbb{C}^n = N_{\xi(z)}^c \oplus T_{\xi(z)}^c$, к ∂D в точке $\xi(z)$ соответственно.

Геометрически это условие на функцию f означает, что ее сферическая производная в нормальном и комплексных касательных направлениях растет не быстрее, чем $K/\delta(z)$ и $K/\sqrt{\delta(z)}$ соответственно.

В строго псевдовыпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$ правая часть неравенства (1) эквивалентна стандартным инвариантным метрикам Каратеодори, Кобояси и Бергмана.

Если область D имеет C^2-гладкую границу, то найдется постоянная $r > 0$ такая, что для всех $\xi \in \partial D$ шар $B_r(\xi - r\nu_\xi) \subset D$ и $B_r(\xi - r\nu_\xi) \cap \partial D = \{\xi\}$ (см., например, [2, с. 289]). Используя свойство сжимаемости метрик Каратеодори и Кобояси (см., например, [2, с. 371]) и их вид в шаре $B_r(\xi - r\nu_\xi)$, получаем, что для всех $z \in D$, достаточно близких к ∂D, найдется постоянная K такая, что

$$F(z, dz) \leqslant K \left\{\frac{|dz_N|}{\delta(z)} + \frac{|dz_T|}{\sqrt{\delta(z)}}\right\}^2,$$

где $F(z, dz)$ — либо метрика Каратеодори, либо метрика Кобояси области D. Поэтому класс $N(D)$ содержит класс нормальных функций, введенный в работе [3].

В [4] доказана в строго псевдовыпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$ теорема Линделефа для функций класса $N(D)$. Если в теореме Линделефа заменить множества $D_\alpha^\varepsilon(\xi)$ множествами $D_\alpha(\xi)$, то теорема перестает быть справедливой. Действительно, нетрудно показать, что все ограниченные голоморфные функции принадлежат классу $N(D)$. В работе [1, с. 179] приведен пример ограниченной голоморфной функции, у которой в некоторой граничной точке существует предел вдоль нормали, но не существует K-предела. Однако имеет место следующее уточнение теоремы Линделефа.

Теорема. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, с границей класса C^2. Если функция $f \in N(D)$ имеет предел a вдоль нормали к ∂D в точке ξ и $f(z) - a \neq 0$ в области D, то функция f имеет K-предел a в точке ζ.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(z) = f(z) - a$ принадлежит классу $N(D)$. Из условий теоремы следует, что функция $\varphi(z) \neq 0$ и голоморфна в области D, поэтому функция $\log|\varphi|^2$ там плюригармонична. Следовательно, для всех $z \in D$, $\omega \in \mathbb{C}^n$

$$L_z(\log(1 + |\varphi|^2), \omega) \equiv L_z\left(\log\left(1 + \frac{1}{|\varphi|^2}\right), \omega\right).$$

Так как функция $\varphi \in N(D)$, то из предыдущего тождества следует, что и функция $F(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)} \in N(D)$.

Без ограничения общности можно считать, что координаты $z_1, \dots, z_n$ в $\mathbb{C}^n$ выбраны таким образом, что $\xi = (0)$ — положительное направление оси $\operatorname{Re} z_n$ — совпадает с направлением внутренней нормали к ∂D в точке 0, $T_0^c = \{z \in \mathbb{C}^n : z = ('z, 0)\}$, а $N_0^c = \{z \in \mathbb{C}^n : z = ('0, z_n)\}$. Здесь и далее $'z = (z_1, \dots, z_{n-1})$.

Для любых α и β, $\beta > \alpha$, найдется постоянная $c = c(\alpha, \beta)$ такая, что для всех $b \in D_\alpha(0)$ поликруг

$$P(b, 2c) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\mu - b_\mu| < 2c\sqrt{\operatorname{Re} b_n}, \quad \mu = 1, \dots, n-1; \\ |z_n - b_n| < 2c \operatorname{Re} b_n\}$$

принадлежит области $D_\beta(0)$ (см. [5], леммы 5.2 и 7.2).

При биголоморфном отображении $\Phi_b(z) = (w_1(z), \dots, w_n(z))$, где $w_\mu(z) = \dfrac{z_\mu - b_\mu}{2c\sqrt{\operatorname{Re} b_n}}$, $\mu = 1, \dots, n-1$; $w_n(z) = \dfrac{z_n - b_n}{2c \operatorname{Re} b_n}$, поликруг $P(b, 2c)$ переходит в поликруг $P = \{w \in \mathbb{C}^n : |w_\mu| < 1, \ \mu = 1, \dots, n\}$. С каждой точкой $b \in D_\alpha(0)$ свяжем функцию $g_b(w) = F(\Phi_b^{-1}(w))$, определенную и голоморфную в поликруге P.

По правилу дифференцирования сложных функций

$$\begin{gathered} \partial g(w)/\partial w_\mu = 2c\sqrt{\operatorname{Re} b_n}\,\partial F(z)/\partial z_\mu, \quad \mu = 1, \dots n-1, \\ \partial g(w)/\partial w_n = 2c \operatorname{Re} b_n\,\partial F(z)/\partial z_n. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь производные функции F вычислены в точке $z = \Phi_b^{-1}(w)$.

Для точек $z \in D_\beta(0)$ евклидово расстояние $\delta(z) \approx \operatorname{Re} z_n$ (см. [5], лемма 5.2). Выражение $A \approx B$ означает, что найдутся положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что $c_1|A| < |B| < c_2|A|$. Так как для всех точек $b \in D_\alpha(0)$ поликруг $P(b, 2c) \subset D_\beta(0)$, то $\delta(z) \approx \operatorname{Re} b_n$ для всех $z \in P(b, 2c)$.

Фиксируем произвольную точку $z \in D_\alpha(0)$. Пусть $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$ такие, что $T_{\xi(z)}^c = \{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n : \tilde{z} = ('\tilde{z}, 0)\}$, а $N_{\xi(z)}^c = \{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n : \tilde{z} = ('0, z_n)\}$.

В [6] (§ 12, лемма 1) доказано, что

$$\sum_{\mu=1}^{n-1}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_\mu}\right|\sqrt{\delta(z)} + \left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_n}\right|\delta(z) \approx \sum_{\mu=1}^{n-1}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial \tilde{z}_\mu}\right|\sqrt{\delta(z)} + \left|\frac{\partial F(z)}{\partial \tilde{z}_n}\right|\delta(z).$$

Функция $F \in N(D)$, поэтому из (1) следует

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z_\mu} \right| \sqrt{\delta(z)} + \left| \frac{\partial F(z)}{\partial \tilde{z}_n} \right| \delta(z) \leqslant K.$$

Из этого неравенства и (2) получаем, что для всех $w \in P$, $\omega \in \mathbb{C}^n$

$$L_w(\log(1 + |g_b|^2), \omega) \leqslant K |\omega|^2.$$

Следовательно, семейство $\{g_b\}_{b \in D_\alpha(0)}$ равностепенно непрерывно из евклидовой метрики в сферическую. По теореме Арцела (см., например, [7]) семейство функций $\{g_b\}_{b \in D_\alpha(0)}$ нормально в поликруге P.

Пусть $\{z^m\}$ — любая последовательность точек из $D_\alpha(0)$ такая, что $z^m = ('z^m, z_n^m) \to 0$ при $m \to \infty$. Докажем, что $F(z^m) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Из условий теоремы следует, что функция $F('0, z_n)$ нормальна в $U = D \cap N_0^c$ и имеет предел, равный бесконечности вдоль нормали к ∂U в точке $\xi_n = (0)$. По одномерной теореме Линделефа для нормальных функций [8] функция $F('0, z_n)$ имеет в точке $\xi_n = (0)$ угловой предел, равный бесконечности.

Выберем целое число N такое, что $\alpha < 2cN$. В выбранной системе координат $d_0(z) = \operatorname{Re} z_n$, поэтому из определения множеств $D_\alpha(0)$ следует, что $|'z|^2 < 2cN \operatorname{Re} z_w$. Тогда любой отрезок $[z^m, ('0, z_n^m)]$ можно покрыть k_m, $k_m < N + 1$, поликругами

$$P_{m,k} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\mu - b_\mu^k| < c\sqrt{\operatorname{Re} z_n^m}, \quad \mu = 1, \ldots, n-1; \quad |z_n - z_n^m| < \operatorname{Re} z_n^m\}$$

такими, что $P_{m,1} \ni ('0, z_n^m)$ и $P_{m,k} \cap P_{m,k+1} \neq \varnothing$ для всех $m \geqslant 1$, $k < k_m$.

С каждой точкой $(b_1^k, \ldots, b_{n-1}^k, z_n^m)$ свяжем функцию $g_{m,k} \in H(P)$ так, как это делалось выше. Положим $G_m = g_{m,1}$, $m \geqslant 1$. Так как $P_{m,1} \ni ('0, z_n^m)$, то найдется последовательность точек $\{w^m\}$, принадлежащая некоторому замкнутому поликругу $\overline{P}_1 \subset P$, такая, что $G_m(w^m) = F('0, z_n^m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Семейство функций $\{G_m\}$ нормально в поликруге P, поэтому из изложенного выше следует, что для любой последовательности точек $\{c^m\}$ из любого замкнутого поликруга $\overline{P}_2 \subset P, G_m(c^m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Далее для всех $m \geqslant 1$ таких, что $k_m > 1$, положим $G_m = g_{m,2}$; для остальных m оставим G_m без изменения. Так как $P_{m,1} \cap P_{m,2} \neq \varnothing$, то можно повторить предыдущие рассуждения. После конечного числа шагов доказательство будет завершено, поскольку $P_{m,k_m} \ni z^m$ для всех $m \geqslant 1$ и следовательно, найдется последовательность точек $\{d^m\}$, принадлежащих некоторому замкнутому поликругу $\overline{P}_3 \subset P$, такая, что $G_m(d^m) = F(z^m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Следовательно, $f(z^m) \to a$ при $m \to \infty$. Так как последовательность точек $\{z^m\}$ из $D_\alpha(0)$ выбрана произвольной, то доказано, что функция f имеет K-предел в точке 0. Теорема доказана.

Следствие. *Предположим, что*

1) *D — область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, с C^2-гладкой границей, $\xi \in \partial D$;*
2) *Ω — строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 1$;*
3) *$F : D \to \Omega$ — голоморфное отображение.*

Если $F(\xi - t\nu_\xi) \to A$ при $t \to 0$, то каждая компонента F_μ отображения F имеет K-предел в точке ξ.

Доказательство. Так как область Ω строго псевдовыпукла, то $\Omega = \{w \in \mathbb{C}^m : \rho(w) < 0\}$, где ρ — дважды гладкая строго плюрисубгармоническая функция в окрестности $\partial\Omega$.

Положим $A = (A_1, \ldots, A_m)$ и

$$H_A(w) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \rho(A)}{\partial w_\mu}(w_\mu - A_\mu) + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{m} \frac{\partial^2 \rho(A)}{\partial w_\mu \partial w_\nu}(w_\mu - A_\mu)(w_\nu - A_\nu).$$

Функция $g(z) = \exp(H_A(F(z)))$ по модулю меньше единицы и голоморфна в некоторой окрестности точки A [2, с. 377]. Из условий 1—3 следует, что функция g имеет предел, равный единице вдоль нормали к ∂D в точке ξ. Следовательно, по теореме функция g имеет K-предел, равный единице в точке ξ. Поскольку $H_A(w) \neq 0$, если $w \neq A$, то компоненты F_μ отображения F имеют K-предел в точке ξ.

Замечания. 1. Существование почти всюду K-пределов у ограниченных голоморфных функций многих комплексных переменных установлено Кораньи [9] и Стейном [6]; комплексно-геометрическая природа этого явления исследована Е. М. Чиркой [10]. Теорема Линделефа для ограниченных голоморфных функций многих комплексных переменных впервые сформулирована и доказана Е. М. Чиркой [10].

2. Теорема справедлива и для нормальных функций, определенных в статье [3]. Более того, в зависимости от геометрии области допускаются касательные подходы к границе области гораздо более быстрые, чем параболические. Например, если область $D \subset \mathbb{C}^n$ имеет $\mathbb{C}^m$-гладкую границу и степень касания ∂D с $T_\xi^c(\partial D)$ в точке ξ равна m, т. е. $|\delta(v)| \leqslant 0(1)|v-\xi|^m$ для всех $v \in T_\xi^c(\partial D)$, нормальная функция f вдоль нормали ν_ξ к ∂D в точке ξ имеет предел a и $f(z) \neq a$ в области D, то тот же предел она имеет и по областям

$$D_\alpha^m(\xi) = \{z \in D : |(z-\xi, \nu_\xi)| < (1+\alpha)\,\delta_\xi(z), |z-\xi|^m < \alpha\delta_\xi(z)\}$$

Доказательство, по существу, проводится тем же способом.

1. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.— М. : Мир, 1984.— 455 с.
2. *Krantz S. G.* Function theory of several complex variables.— New York : Wiley, 1982.— 437 p.
3. *Cima J. A., Krantz S. G.* The Lindelöf principle and normal functions of several complex variables // Duke Math. J.— 1983.— **50**, N 1.— P. 303—329.
4. *Довбуш П. В.* Теорема Линделефа в $\mathbb{C}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1981.— № 6.— С. 33—36.
5. *Ramey W. C.* Boundary behavior of bounded holomorphic functions along maximally complex submanifolds // Amer. J. Math.— 1984.— **106**, N 4.— P. 975—1001.
6. *Stein E. M.* Boundary behoviour of holomorphic function of several complex variables.— Princeton : Princeton univ. press., 1972.— 236 p.
7. *Wu H. H.* Normal families of holomorphic mappings // Acta Math.— 1967.— **119**.— P. P 193—233.
8. *Lexto O., Virtanen K. I.* Boundary behaviour and normal meromorphic functions // Ibid.— 1957.— **97**,— P. 47—65.
9. *Koranyi A.* Harmonic functions of Hermitian hyperbolic space // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— **135**.— P. 507—516.
10. *Чирка Е. М.* Теоремы Линделефа и Фату в $\mathbb{C}^n$ // Мат. сб.— 1973.— **92**, № 4.— С. 622—644.

Центр автоматизации науч. исслед.
и метрологии АН МССР, Кишинев

Получено 20.01.86