

Непрерывные полугруппы в локально выпуклых алгебрах

Изучаются условия непрерывности однопараметрических полугрупп в локально выпуклых алгебрах общего вида.

Вивчаються умови неперервності однопараметричних півгруп в локально опуклих алгебрах загального вигляду.

В настоящей работе известная теорема об условиях непрерывности однопараметрических полугрупп ограниченных линейных операторов банаховых пространств (см., например, [1], гл. 9, п. 1) распространяется на более общий случай — полугрупп элементов ненормируемых локально выпуклых алгебр. Отмечается дифференцируемость непрерывных полугрупп, обладающих в алгебре слабым генератором. Результаты применяются при изучении полугрупп в сверточных алгебрах распределений Шварца, в алгебрах неограниченных операторов.

Локально выпуклой алгеброй (ЛВА) называем алгебру с единицей 1 , заданную над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, являющуюся хаусдорфовым локально выпуклым пространством с раздельно непрерывным умножением элементов. Произвольную ЛВА обозначим через $\mathcal{A}$, топологически сопряженное к $\mathcal{A}$ пространство — через $\mathcal{A}'$. (В работе используем стандартные обозначения и понятия из [2, 3].) Полугруппой (однопараметрической) в $\mathcal{A}$ называется функция $x(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющая уравнению $x(t+s) = x(t) \cdot x(s)$ и условию $x(0) = 1$.

Теорема 1. Если умножение в ЛВА $\mathcal{A}$ ограничено, то каждая полугруппа $x(t)$ в $\mathcal{A}$, удовлетворяющая в слабой топологии $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ условию $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 1$, непрерывна.

Доказательство. Операция умножения в $\mathcal{A}$ также слабо непрерывна, поэтому $x(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t - t_0) x(t_0)$ в топологии $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, т. е. во всех точках $t_0 \geq 0$ функция $x(t)$ слабо непрерывна справа. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{A}'$ и вещественного числа α множество $\{t \geq 0 : \alpha > \operatorname{Re} \langle x(t), \varphi \rangle\}$ представимо в виде счетного объединения интервалов с положительными длинами. Следовательно, для любого $\varphi \in \mathcal{A}'$ функция $\langle x(t), \varphi \rangle$ интегрируема на компактах из $[0, \infty)$. Кроме того, в силу слабой

непрерывности справа полугруппа $x(t)$ ограничена в окрестности нуля. Поэтому $x(t)$ ограничена на компактах из $[0, \infty)$.

Пусть $\tilde{S}[\alpha, \beta]$ — слабое пополнение выпуклой уравновешенной оболочки $S[\alpha, \beta]$ множества $\{x(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$, где $\alpha, \beta \geq 0$. Поскольку $S[\alpha, \beta]$ ограничено, то $\tilde{S}[\alpha, \beta]$ содержится во втором сильном сопряженном пространстве $\mathcal{A}''$ к алгебре $\mathcal{A}$ (см. [2], п. 8.3.1). Образует векторное пространство $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}'' = \{\lambda \tilde{S}[\alpha, \beta] : \lambda \in \mathbb{C}\}$ с нормой $\|\lambda\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]} = \inf \{\lambda : x \in \lambda \tilde{S}[\alpha, \beta]\}$. Ввиду непрерывности вложения $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}'' \subset [\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')] и компактно-$

сти $\tilde{S}[\alpha, \beta]$ в $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]'$, пространство $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$ банахово.

Для всякой окрестности нуля U пространства $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]'$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{S}[\alpha, \beta] \subset \varepsilon U$. Ввиду слабой непрерывности справа $x(t)$, если $t_0 \in [\alpha, \beta]$ и $t_n \rightarrow +t_0$, то для всякого числа $\delta > 0$ существует номер n_0 такой, что $\{x(t_n) - x(t_0) : n \geq n_0\} \subset \delta \varepsilon U$. Следовательно, $\{x(t_n) - x(t_0) : n \geq n_0\} \subset \delta \tilde{S}[\alpha, \beta]$ и $x(t)$ непрерывна справа на $[\alpha, \beta]$ в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$.

Пусть $\{r_n\}$ — совокупность всех рациональных чисел в $[\alpha, \beta]$. Тогда линейные комбинации вида $\sum_k (\alpha_k + i\beta_k) x(r_k)$, где α_k и β_k — рациональные числа, образуют некоторое счетное множество $Q[\alpha, \beta]$ в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$. Из непрерывности справа $x(t)$ в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$ следует, что множество $\{x(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ принадлежит замыканию $\bar{Q}[\alpha, \beta]$ множества $Q[\alpha, \beta]$ в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$, т. е. $\{x(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ сепарабельно в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$. Тогда в силу известной теоремы [2] (п.8.15.2) функция $x(t)$ в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$ интегрируема по Бохнеру на $[\alpha, \beta]$.

Модифицируем известные рассуждения классического доказательства. Пусть $0 < s < t$, тогда $x(t) = x(t-s)x(s)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем числа α и β такими, чтобы $0 \leq \alpha < s < \beta < t - \varepsilon < t$. Тогда $(\beta - \alpha)[x(t \pm \varepsilon) - x(t)] = \int_{\alpha}^{\beta} x(s)[x(t \pm \varepsilon - s) - x(t - s)] ds \in \mathcal{A}$. В силу ограниченности умножения в $\mathcal{A}$ произведение $S[\alpha, \beta] \cdot S[\alpha, \beta]$ ограничено. Пусть $L(S[\alpha, \beta])$ — образ множества $S[\alpha, \beta]$ при левом регулярном представлении L алгебры $\mathcal{A}$ [4]. Поскольку L допускает $\sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')$ -непрерывное расширение на $\mathcal{A}''$ и $\tilde{S}[\alpha, \beta] \subset \mathcal{A}''$, то множество $L(S[\alpha, \beta])\tilde{S}[\alpha, \beta]$ ограничено в $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]'$. Поэтому ограничена его замкнутая выпуклая уравновешенная оболочка $\tilde{D}[\alpha, \beta]$ в $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]'$. Поскольку выполняется неравенство $\|xy\|_{\tilde{D}[\alpha, \beta]} \leq \|x\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]} \|y\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}$ при $x \in \mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$ и $y \in \mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$, где $\|\cdot\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}$ и $\|\cdot\|_{\tilde{D}[\alpha, \beta]}$ определяются так же, как $\|\cdot\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}$, то в предположении, что $1 \in S[\alpha, \beta]$, убеждаемся в сепарабельности $\{x(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ в $\mathcal{A}_{\tilde{D}[\alpha, \beta]}''$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x(t \pm \varepsilon) - x(t)\|_{\tilde{D}[\alpha, \beta]} &\leq \max_{s \in [\alpha, \beta]} \frac{\|x(s)\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}}{|\beta - \alpha|} \times \\ &\times \int_{\alpha}^{\beta} \|x(t \pm \varepsilon - s) - x(t - s)\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]} ds. \end{aligned}$$

Поскольку пространства вида $\mathcal{A}_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]}''$ банаховы и функции $\|x(t)\|_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]}$ интегрируемы на $[s-\alpha, s-\beta]$, то полугруппа $x(t)$ допускает аппроксимацию $\mathcal{A}_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]}''$ -значными непрерывными функциями относительно норм

$\int_{-\alpha}^{-\beta} \|x(t)\|_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]} dt$ [1, гл. 5, п. 5]. Это значит, что для всякого числа $\delta > 0$ существует непрерывная функция $x_\delta(t)$ такая, что

$$\int_{s-\alpha}^{s-\beta} \|x(t) - x_\delta(t)\|_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]} dt < \delta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|x(t \pm \varepsilon) - x(t)\|_{\tilde{D}[\alpha, \beta]} &\leq M \int_{s-\alpha}^{s-\beta} \|x(u \pm \varepsilon) - x_\delta(u \pm \varepsilon)\|_{\tilde{S}[s-\beta, s-\alpha]} du + \\ &+ M \int_{s-\alpha}^{s-\beta} \|x_\delta(u \pm \varepsilon) - x_\delta(u)\|_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]} du + M \int_{s-\alpha}^{s-\beta} \|x_\delta(u) - x(u)\|_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]} du \leq \\ &\leq 2M(\beta - \alpha)\delta + M \int_{s-\alpha}^{s-\beta} \|x_\delta(u \pm \varepsilon) - x_\delta(u)\|_{\tilde{S}[s-\alpha, s-\beta]} du, \end{aligned}$$

где $M = \max_{s \in [\alpha, \beta]} \frac{\|x(s)\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}}{\beta - \alpha}$. В силу непрерывности $x_\delta(t)$, $x_\delta(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\delta(u \pm \varepsilon)$ и, следовательно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x(t \pm \varepsilon) - x(t)\|_{\tilde{S}[\alpha, \beta]} = 0$, т. е. $x(t)$ — непрерывная в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}''$ функция при $t \in (\alpha, \beta)$. Вложения $\mathcal{A}_{\tilde{S}[\alpha, \beta]}'' \subset [\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]'$ непрерывны для всех $\beta > \alpha \geq 0$, поэтому $x(t)$ — слабо непрерывна при $t > 0$.

Для любого рационального числа $r_n > 0$ имеем $x(t + r_n) = x(t) x(r_n)$. Из непрерывности $x(t)$ при $t > 0$ в $\mathcal{A}_{\tilde{D}[0, 1]}''$ следует $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) x(r_n) = x(r_n)$. Каждое значение $x_m \in Q[0, 1]$ представляет собой конечную линейную комбинацию элементов $x(r_n)$ и поэтому $x_m = \lim_{t \rightarrow +0} x(t) x_m$, $m = 1, 2, \dots$, в $\mathcal{A}_{\tilde{D}[0, 1]}''$. Из неравенства $\|x(t) - 1\|_{\tilde{D}[0, 1]} \leq \|x(t) x_m - x_m\|_{\tilde{D}[0, 1]} + \|x_m - 1\|_{\tilde{D}[0, 1]} + \|x(t)(1 - x_m)\|_{\tilde{D}[0, 1]}$ и ограниченности числа $N = \max_{t \in [0, 1]} \|x(t)\|_{\tilde{S}[0, 1]}$ получаем $\|x(t) - 1\|_{\tilde{D}[0, 1]} \leq \|x(t) x_m - x_m\|_{\tilde{D}[0, 1]} + \|x_m - 1\|_{\tilde{D}[0, 1]} + N \|1 - x_m\|_{\tilde{S}[0, 1]}$. Выше показано, что $\{x(t) : t \in [0, 1]\}$ содержится в замыкании $\bar{Q}[0, 1]$ в $\mathcal{A}_{\tilde{S}[0, 1]}''$, поэтому $\inf \{\|1 - x_m\|_{\tilde{S}[0, 1]} : x_m \in Q[0, 1]\} = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +0} \|x(t) - 1\|_{\tilde{D}[0, 1]} = 0$. Итак, $x(t)$ — слабо непрерывна при $t \geq 0$.

Для каждой открытой окрестности нуля U в $[\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}')]'$ множество $U_{a/n} \equiv \{t \geq 0 : x(t) \in a/nU\}$, где $a > 0$ и $n = 1, 2, \dots$, открыто в $[0, \infty)$. Ввиду того, что для любых $\beta > \alpha \geq 0$ вложение $S[\alpha, \beta] \subset [\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}')]'$ непрерывно, каждое пересечение $(a/nU) \cap \mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]}$ открыто в $\mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]}$. Поскольку при некотором $a > 0$ можно полагать $\{\lambda S[\alpha, \beta] : |\lambda| < 1\} \subset aU$, то $\{(a/nU) \cap \mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]} : n = 1, 2, \dots\}$ — база окрестностей нуля в $\mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]}$. Из соотношения $\{x(t) : t \in [\alpha, \beta]\} \subset \mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]}$ следует, что $U_{a/n} = \{t \geq 0 : x(t) \in (a/nU) \cap \mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]}\}$ открыто в $[\alpha, \beta]$ для всех $n = 1, 2, \dots$, т. е. $x(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]}$ — непрерывная функция. Так как при любых $\beta > \alpha \geq 0$ вложения $\mathcal{A}_{S[\alpha, \beta]} \subset \mathcal{A}$ непрерывны, то $x(t)$ при $t \geq 0$ непрерывна в $\mathcal{A}$.

Примеры. 1. Пусть $\mathcal{D}'_+$ — сверточная алгебра распределений Шварца на оси $\mathbb{R}$ с носителями на полуоси $[0, \infty)$, наделенная слабой топологией пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Тогда $\mathcal{D}'_+$ — ЛВА (см. [5], п. 5, § 4). Функция $x(t) = \delta(\xi + t)$, где $\xi \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ и $\delta(\xi)$ — функция Дирака, образует непрерывную полугруппу сдвигов в $\mathcal{D}'_+$.

2. В алгебре $\mathcal{D}'_+$ рассмотрим функцию

$$f_t(\xi) = \begin{cases} \frac{\theta(\xi) \xi^{t-1}}{\Gamma(t)}, & t > 0, \\ f_{t+n}^{(n)}(\xi), & t < 0, t + n > 0, \end{cases}$$

где $\xi \in \mathbb{R}$, $\theta(\xi)$ — характеристическая функция $[0, \infty)$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция и n — натуральное число.

При $t \geq 0$ функция $x(t) = f_{-t}(\xi)$ образует полугруппу в алгебре $\mathcal{D}'_+$ операторов дробного дифференцирования порядка t (см. [5], п. 8д, § 4), так как $f_{-t-s}(\xi) = f_{-t}(\xi) * f_{-s}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, для всех $t, s \geq 0$. Так как $f_{-t}(\xi) = f_{1-t}(\xi) = \left[\frac{\theta(\xi) t^{-t}}{\Gamma(1-t)} \right]'$, то для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем

$$\left\langle \frac{[\theta(\xi) \xi^{-t}]'}{\Gamma(1-t)}, \varphi \right\rangle = - \frac{1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi'(\xi) d\xi$$

при $0 < t < 1$. Однако, $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi'(\xi) d\xi = -\varphi(0)$, т. е. $\lim_{t \rightarrow +0} f_{-t} = \delta$ — единица алгебры $\mathcal{D}'_+$. В силу теоремы 1 полугруппа $x(t) = f_t(\xi)$ непрерывна в $\mathcal{D}'_+$.

3. В алгебре $\mathcal{D}'_+$ функция $x(t) = f_t(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, образует полугруппу операторов дробного интегрирования порядка t (см. [5], п. 8д, § 4). Для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned} \langle f_t(\xi), \varphi \rangle &= \frac{t}{\Gamma(t+1)} \langle \theta(\xi) \xi^{t-1}, \varphi \rangle = \frac{t}{\Gamma(t+1)} \int_0^\infty \xi^{t-1} \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{t}{\Gamma(t+1)} \left[\frac{\xi^t \varphi(\xi)}{t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\xi^t}{t} \varphi'(\xi) d\xi \right] = \frac{-1}{\Gamma(t+1)} \int_0^\infty \xi^t \varphi'(\xi) d\xi \end{aligned}$$

при $0 < t < 1$. Так как $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(t+1)} \int_0^\infty \xi^t \varphi'(\xi) d\xi = -\varphi(0)$, т. е. $\lim_{t \rightarrow +0} f_t = \delta$, то полугруппа $x(t) = f_t(\xi)$ непрерывна в $\mathcal{D}'_+$.

Пусть $\{x(t) : t \geq 0\}$ — полугруппа в ЛВА $\mathcal{A}$. Слабый предел в $\mathcal{A}$ вида $\lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} [x(t) - 1] = x$ (если он существует) называем генератором полугруппы $x(t)$ в алгебре $\mathcal{A}$.

Теорема 2. Каждая непрерывная полугруппа $x(t)$ алгебры $\mathcal{A}$, обладающая в $\mathcal{A}$ генератором x , дифференцируемая при $t \geq 0$, т. е. существует предел $dx(t)/dt = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [x(t+s) - x(s)]$ для любого $s \geq 0$ в исходной топологии $\mathcal{A}$, и $dx(t)/dt = x \cdot x(t) = x(t) \cdot x$.

Доказательство. Так как $x(s) \cdot x = x(s) \cdot \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} [x(t) - 1] = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} [x(s+t) - x(t)] = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} [x(t) - 1] x(s) = x \cdot x(t)$, то слабая правая производная удовлетворяет указанному в формулировке соотношению. Отсюда и из непрерывности $x(t)$ следует, что слабая правая производная от $x(t)$ непрерывна. Тогда, как известно [1] (гл. 9, § 3), для любой формы $\varphi \in \mathcal{A}'$ функция $\langle x(t), \varphi \rangle$ имеет непрерывную производную при $t \geq 0$.

Поэтому $\langle [x(t) - 1], \varphi \rangle = \int_0^t \frac{d}{ds} \langle x(s), \varphi \rangle ds = \int_0^t \langle x(s) \cdot x, \varphi \rangle ds$. Функция $x(s) \cdot x$ со значениями в квазиполном ЛВП $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]_t$ непрерывна и поэтому существует соответствующий интеграл Петтиса $\int_0^t x(s) \cdot x ds \in \mathcal{A}''$ и $\int_0^t \langle x(s) \cdot x, \varphi \rangle ds = \langle \int_0^t x(s) \cdot x ds, \varphi \rangle$ для любого $\varphi \in \mathcal{A}'$ [2] (п. 8.14.3). Таким образом, имеем

$$x(t) - 1 = \int_0^t x(s) \cdot x ds, \quad dx(t)/dt = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} \int_s^{t+s} x(s) \cdot x ds = x(t) \cdot x.$$

Примеры. 4. В алгебре $\mathcal{D}'_+$ генератор группы сдвигов $\{x(t) = \delta(\xi + t) : t \geq 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, равен $-\delta'(\xi)$.

5. В алгебре $\mathcal{D}'_+$ генератор полугруппы операторов дробного дифференцирования $\{x(t) = f_{-t}(\xi) : t \geq 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, равен $\delta'(\xi) - C\delta(\xi)$, где C — константа Эйлера.

Действительно, для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi'(\xi) d\xi \right] &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \left[\frac{-1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi(\xi) d\xi - \varphi(0) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-1}{\Gamma(1-t)} \left[\frac{d}{dt} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi(\xi) d\xi \right] - C\varphi(0) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-1}{\Gamma(1-t)} \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\xi^{1-t}}{1-t} \varphi'(\xi) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\xi^{1-t}}{1-t} \varphi''(\xi) d\xi \right] - C\varphi(0) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi''(\xi) d\xi - C\varphi(0) = -\varphi'(0) - C\varphi(0). \end{aligned}$$

6. В алгебре $\mathcal{D}'_+$ генератор полугруппы операторов дробного интегрирования $\{x(t) = f_t(\xi) : t \geq 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, равен $-(1+C)\delta(\xi)$.

Действительно, при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $0 < t < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \left[\frac{t}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t-1} \varphi(\xi) d\xi - \varphi(0) \right] &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \left[\frac{-1}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^t \varphi'(\xi) d\xi + \varphi(0) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^t \varphi'(\xi) d\xi \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left[\frac{\Gamma'(1+t)}{\Gamma^2(1+t)} \int_0^\infty \xi^t \varphi'(\xi) d\xi - \frac{t}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t-1} \varphi'(\xi) d\xi \right] = -C\varphi(0) - \varphi(0). \end{aligned}$$

1. Иосида К. Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 624 с.

2. Эдвардс Р. Функциональный анализ.— М. : Мир, 1969.— 1071 с.

3. Mallios A. Topological algebras.— Amsterdam : North-Holland, 1986.— 535 p.

4. Лопушанский О. В. Свойства непрерывности умножения в топологических алгебрах // Мат. методы и физ.-мат. поля. — 1985.— № 21.— С. 26—29.

5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 318 с.

Получено 19.06.89