УДК 517.948

В. Н. ПАВЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Челяб. ун-т)

Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями

Устанавливается существование полуправильных решений для одного класса вариационных неравенств с дифференциальными операторами высокого порядка эллиптического типа с разрывной нелинейностью. Доказательство основано на полученной вариационным методом общей теореме об абстрактных вариационных неравенствах с разрывными операторами.

Установлюється існування напівправильних розв'язків для одного класу варіаційних нерівностей з диференціальними операторами високого порядку еліптичного типу з розривною нелінійністю. Доведення обгрунтоване здобутою варіаційним методом загальною теоремою про абстрактні варіаційні нерівності з розривними операторами.

Рассматривается задача об отыскании $u \in K = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\omega) \mid v \geqslant 0$ почти всюду на $\omega\}$ такого, что $\forall v \in K$

$$\sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m} \int_\omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta (v-u)(x)\,dx + \int_\omega g(x, u(x))(v-u)(x)\,dx \geqslant 0, \tag{1}$$

где ω — ограниченная область в R^n с кусочно гладкой границей S, функции $a_{\alpha\beta}$ вещественны и имеют непрерывные производные любого порядка в замкнутой области $\bar{\omega}$, причем $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$ на $\bar{\omega}$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m$, и для произвольных $x \in \bar{\omega}$, $\xi \in R^n$ $\sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \geqslant \varkappa |\xi|^{2m}$, $\varkappa > 0$ и не зависит от d и ξ, функция $g : \omega \times [0; +\infty[\to R$ суперпозиционно измерима, $2m > n$ и для любого $d > 0$ существует функция $a_d \in L^q(\omega)$ $(q > 1)$ такая, что $|g(x, u)| \leqslant a_d(x)$ для любого $u \in [0; d]$ и почти всех $x \in \omega$.

Заметим, что в силу принятых предположений левая часть неравенства 1 определена для любых u, $v \in K$.

Решение u задачи 1 называется полуправильным, если для почти всех $x \in \omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$. Для интегральных уравнений и уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями полуправильные решения введены и изучены в [1, 2] в связи с проблемой корректности решений нелинейных уравнений по отношению к различного рода возмущениям. В данной статье вариационным методом доказывается теорема существования полуправильного решения задачи 1. Кроме того, по сравнению с [3] ослаблены ограничения на точки разрыва нелинейности $g(x, u)$ по u.

1. Общие теоремы. В этом пункте устанавливаются предложения о разрешимости задачи об отыскании $u \in K$ такого, что

$$\langle Tu, v - u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \tag{2}$$

где K — выпуклое замкнутое неограниченное множество в вещественном банаховом пространстве E, оператор T определен на K и действует в сопряженное пространство E^*, через $\langle y, x \rangle$ обозначается значение линейного функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Определение 1. *Элемент $u \in K$ называется точкой радиальной непрерывности оператора $T : K \to E^*$, если для произвольного $v \in K$*

$$\lim_{t \to 0} \langle T(u + t(v-u)), v - u \rangle = \langle Tu, v - u \rangle.$$

В противном случае $u \in K$ называют точкой разрыва оператора T.

Определение 2. *Точку разрыва u оператора $T : K \to E^*$ назо-*

© В. Н. ПАВЛЕНКО, 1991

вем регулярной, если найдется $v \in K$ такой, что

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \langle T(u + t(v-u)), v-u\rangle < 0.$$

Предложение 1. *Пусть оператор $T: K \to E^*$ квазипотенциален на K [3] и его точки разрыва регулярны. Тогда если f — потенциал оператора T и $u \in K$ — точки условного минимума f относительно K, то u удовлетворяет неравенству (2) и является точкой радиальной непрерывности оператора T.*

Доказательство. Так как u — точка условного минимума f относительно K, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $v \in K$ и $0 < \tau < \tau_0(v) = \min(1, \varepsilon/\|v-u\|)$ имеем

$$0 \leqslant f(u + \tau(v-u)) - f(u) = \tau \int_0^1 \langle T(u + t\tau(v-u)), v-u\rangle\, dt. \tag{3}$$

Отсюда следует, что u — точка радиальной непрерывности оператора T, так как в противном случае существует $v \in K$, для которого

$$\overline{\lim_{\theta\to+0}} \langle T(u + \theta(v-u)), v-u\rangle < 0,$$

и значит, для некоторого $\delta > 0$ и любого $0 < \theta < \delta$ значения $\langle T(u + \theta(v-u)), v-u\rangle$ будут отрицательными. Поэтому для $\tau \in]0; \min(\tau_0(v), \delta)[$ получим $f(u + \tau(v-u)) - f(u) < 0$, что противоречит (3). Из радиальной непрерывности оператора T в точке u следует равномерная сходимость $\varphi_\tau(t) = \langle T(u + t\tau(v-u)), v-u\rangle$ к $\langle Tu, v-u\rangle$ на $[0; 1]$ при $\tau \to +0$, что вместе с (3) дает

$$0 \leqslant \lim_{\tau\to+0} \int_0^1 \langle T(u + t\tau(v-u)), v-u\rangle\, dt = \langle Tu, v-u\rangle.$$

Предложение 1 доказано.

Теорема 1. *Предположим, что E рефлексивно, $T = T_1 + T_2$, где $T_i: K \to E^*$ — квазипотенциальные операторы на K, $i = 1, 2$, T_1 монотонное, а T_2 компактное отображения на K, причем для потенциала f оператора T имеет место равенство*

$$\lim_{u\in K, \|u\|\to+\infty} f(u) = +\infty, \tag{4}$$

и точки разрыва T регулярны. Тогда задача (2) имеет решение, которое является точкой радиальной непрерывности оператора T.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 3 из [3], если воспользоваться предложением 1.

Определение 3. *Элемент $u \in K$ назовем точкой h-полунепрерывности сверху оператора $T: K \to E^*$, если для любого $v \in K$:*

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \langle T(u + t(v-u)), v-u\rangle \leqslant \langle Tu, v-u\rangle.$$

Справедливо следующее обобщение теоремы 3 из [3]

Теорема 2. *Пусть $T = T_1 + T_2$, где операторы $T_i: K \to E^*$ квазипотенциальны на K, $i = 1, 2$, T_1 монотонный, а T_2 компактный на K, E рефлексивно и потенциал f оператора T удовлетворяет условию (4). Тогда если каждая точка разрыва оператора T либо регулярна, либо является точкой h-полунепрерывности сверху, то задача (2) имеет решение.*

Доказательство. В случае, когда все точки разрыва оператора T регулярны, утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1. Допустим, что оператор T имеет точку разрыва u, которая не является регулярной. Тогда u — точка h-полунепрерывности сверху оператора T и для произвольного $v \in K$:

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \langle T(u + t(v-u)), v-u\rangle \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что u — решение задачи (2). Теорема 2 доказана.

2. Формулировки и доказательства основных результатов. В этом пункте смысл обозначений ω, S, $a_{\alpha\beta}$, g и K тот же, что и в данной выше постановке задачи (1). Предполагается, что принятые допущения выполняются.

Определение 4. *Предположим, что вещественнозначная функция* $\varphi(x, u)$, *заданная на* $\omega \times [0; +\infty[$, *для любого* $u \in [0; +\infty[$ *измерима по* x *на* ω, *и для почти всех* $x \in \omega$ *функция* $\varphi(x, \cdot)$ *имеет разрывы только первого рода и непрерывна справа на* $[0; +\infty[$ (*отсюда следует, что* φ *суперпозиционно измерима* [4]). *Будем говорить, что* φ *удовлетворяет* AI-*условию* (*А-условию*) *по отношению к дифференциальному оператору*

$$\tau = \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\beta|} D^{\beta} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha},$$

если существует семейство гиперповерхностей $S_i = \{(x, u) \in R^{n+1} \mid x \in \omega, u = \varphi_i(x)\}$, $\varphi_i \in C^{2m}(\bar{\omega})$, $i \in \Lambda$, Λ *конечно или счетно, таких, что для почти всех* $x \in \omega$ *и любой точки разрыва* u *функции* $\varphi(x, \cdot)$ (*и любого* $u \in \{v \in]0; +\infty[\mid \varphi(x, v-) < \varphi(x, v)\}$) *найдется* $i \in \Lambda$ *такое, что* $(x, u) \in S_i$ *и* $\tau\varphi_i(x) + \varphi(x, \varphi_i(x)) \neq 0$ $((\tau\varphi_i(x) + \varphi(x, \varphi_i(x)))(\tau\varphi_i(x) + \varphi(x, \varphi_i(x)-)) > 0)$.

Замечание 1. Если функция $\varphi : \omega \times [0; +\infty[\to R$ такова, что для любого $u \in [0; +\infty[$ сечение $\varphi(\cdot, u)$ измеримо на ω, и для почти всех $x \in \omega$ функция $\varphi(x, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода и непрерывна справа на $[0; +\infty[$, причем для произвольной точки разрыва u этого сечения $\varphi(x, u-) > \varphi(x, u)$, то φ удовлетворяет A-условию по отношению к τ.

2. Если для $\varphi : \omega \times [0; +\infty[\to R$ выполнено A-условие относительно τ и для почти всех $x \in \omega$ для произвольной точки разрыва u сечения $\varphi(x, \cdot)$ найдется $i \in \Lambda$ такое, что $(x, u) \in S_i$, то φ удовлетворяет и AI-условию по отношению к τ.

Теорема 3. *Предположим, что*

1) *функция* $g : \omega \times [0; +\infty[\to R$ *удовлетворяет* A-*условию по отношению к* τ;

2)
$$\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \int_{\omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha}u D^{\beta}u dx \geqslant M \sum_{|\alpha|=m} \| D^{\alpha}u \|^2_{L^2(\omega)}$$

для любого $u \in \mathring{W}_2^m(\omega)$, $M > 0$, $\| \ \|_{L^2(\omega)}$ — *норма в пространстве* $L^2(\omega)$;

3)
$$2 \int_0^u g(x, v) dv \geqslant -ku^2 - k_1(x) u^{2-\gamma} - k_2(x)$$

для произвольного $u \in [0; +\infty[$ *и почти всех* $x \in \omega$, *где* $k > 0$, $0 < \gamma < 2$, $k_1 \in L^{2/\gamma}(\omega)$, $k_2 \in L(\omega)$, *причем* $M - kC > 0$, C — *постоянная в неравенстве*

$$\| u \|^2_{L^2(\omega)} \leqslant C \sum_{|\alpha|=m} \| D^{\alpha}u \|^2_{L^2(\omega)} \quad \forall u \in \mathring{W}_2^m(\omega).$$

Тогда задача (1) *имеет решение.*

Доказательство. Определим операторы $T_i : K \to E^*$, где $E = \mathring{W}_2^m(\omega)$ с нормой $\| u \| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\omega} | D^{\alpha}u |^2 dx \right)^{1/2}$ соотношениями $T_1 = \tilde{T}_1|_K$, $\tilde{T}_1 : E \to E^*$,

$$\langle \tilde{T}_1 u, v \rangle = p_u(v) = \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \int_{\omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha}u D^{\beta}v dx \tag{5}$$

для любых $u, v \in E$ и $\langle T_2 u, v \rangle = \int_{\omega} g(x, u(x)) v(x) dx$ для произвольных $u \in K$ и $v \in E$ (отметим, что K является выпуклым, замкнутым и неограниченным множеством в E). Оператор $\tilde{T}_1$ линейный, ограниченный и самосопряженный. Следовательно, отображение $\widetilde{T}_1$ потенциально и $f_1(u) = \langle \widetilde{T}_1 u, u\rangle/2$ — его потенциал. Из условия 2 теоремы 3 следует $\langle \widetilde{T}_1 u, u\rangle \geqslant M\|u\|^2$ $\forall u \in E$, откуда вытекает монотонность $\widetilde{T}_1$ на E. Так как $2m>n$, то пространство $\mathring{W}_2^m(\omega)$ компактно вкладывается в $C(\bar{\omega})$ и $L^p(\omega)$ для произвольного $p>1$. По условию существует $q>1$ такое, что для любого $d>0$ найдется $a_d \in L^q(\omega)$, удовлетворяющая неравенству $|g(x,u)| \leqslant a_d(x)$ $\forall u \geqslant \in [0; d]$ и почти всех $x \in \omega$. Отсюда и суперпозиционной измеримости g следует, что оператор $T_2' u = g(x, u(x))$ действует из $K \subset C(\omega)$ в $L^q(\omega)$ и ограничен. Операторы вложения J и J_1 пространства $\mathring{W}_2^m(\omega)$ в $C(\bar{\omega})$ и $L^p(\omega)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ соответственно вполне непрерывны, поэтому отображение $T_2 = J_1^* T_2' J$ (J_1^* — оператор, сопряженный с J_1) компактно. Так же, как и при доказательстве теоремы 6 в [3], устанавливается квазипотенциальность T_2 на K и справедливость для потенциала f оператора $T = T_1 + T_2$ равенства (4). Если доказать, что каждая точка разрыва оператора T либо регулярна, либо является точкой h-полунепрерывности сверху, то утверждение теоремы 3 будет следовать из теоремы 2. Пусть $u \in K$ — точка разрыва оператора T, тогда мера Лебега множества $\Omega = \{x \in \omega \mid g(x, u(x) -) < g(x, u(x))\}$ либо равна нулю, либо отлична от нуля. В первом случае для произвольного $v \in K$ имеем $\lim_{t\to+0} \langle T(u + t(v-u)) - Tu, v-u\rangle \leqslant 0$, т. е. u является точкой h-полунепрерывности сверху оператора T. Покажем, что во втором случае точка u является регулярной для оператора T. Допустим противное, тогда для произвольного $h \in \mathring{W}_2^m(\omega)$, удовлетворяющего условию $h(x) \geqslant -u(x)$ почти всюду на ω, справедливо неравенство

$$\lim_{t\to+0} \int_\omega g(x, u(x) + th(x))\, h(x)\, dx + p_u(h) \geqslant 0, \tag{6}$$

где $p_u(h)$ определяется формулой (5). Из принадлежности u пространству $\mathring{W}_2^m(\omega)$ и неравенства $2m>n$ следует, что $u \in C(\bar{\omega})$ и $u|_S = 0$. Кроме того, по условию $g(x,\cdot)$ непрерывна в нуле для почти всех $x \in \omega$ и, значит, u не может быть нулевым элементом пространства $\mathring{W}_2^m(\omega)$, поскольку u — точка разрыва оператора T. Поэтому множество $\omega_+ = \{x \in \omega \mid u(x) > 0\}$ непусто и открыто в R^n. Для произвольной функции $h_1 \in \mathring{C}^\infty(\omega_+)$ с непустым носителем Ω_1 верна оценка

$$p_u(h_1) \geqslant -\|\psi\|_{L^q(\omega_+)} \|h_1\|_{L^p(\omega_+)}, \tag{7}$$

где

$$\psi(x) = \max\{|g(x, u(x))|, |g(x, u(x) -)|\}. \tag{8}$$

Действительно, функция $h(x) = \varepsilon h_1(x)/\sup_{\omega_+}|h_1(x)|$ на ω_+ и равная нулю на $\bar{\omega} \setminus \omega_+$, где $\varepsilon = \inf_{\Omega_1} u(x)$ и положительно (так как Ω_1 компакт и u непрерывна и положительна на Ω_1), удовлетворяет условию $h(x) \geqslant -u(x)$ на ω, а значит, для нее справедливо неравенство (6), из чего следует (7). Таким образом, линейный функционал p_u определен и ограничен на плотном в $L^p(\omega_+)$ подмножестве $\mathring{C}^\infty(\omega_+)$, $p = q/(q-1)$. Поэтому его можно однозначно продолжить до непрерывного на $L^p(\omega_+)$ функционала, откуда вытекает существование $v \in L^q(\omega_+)$ такого, что $p_u(h) = \int_{\omega_+} v(x)\, h(x)\, dx$ $\forall h \in \mathring{C}^\infty(\omega_+)$. Отсюда, в силу равномерной эллиптичности дифференциального оператора τ и гладкости его коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ следует, что $u|_{\omega_+} \in W_{loc,q}^{2m}(\omega_+)$. Так как $\operatorname{mes}\Omega \neq 0$ и множества Ω, $\Omega \cap \omega_+$ могут различаться лишь на множество меры нуль, то из условия 1 теоремы 3 имеем, что для некоторого $i \in \Lambda$:

$$\operatorname{mes}\{x \in \omega_+ \cap \Omega \mid (x, u(x)) \in S_i, (\tau\varphi_i(x) + g(x, u(x)))(\tau\varphi_i(x) + g(x, u(x)-)) > 0\} \neq 0.$$

Поскольку $\omega_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, где $\Omega_n = \{x \in \omega \mid u(x) \geqslant 1/n\}$, то найдутся натуральное n и положительное ε такие, что хотя бы одно из множеств

$$\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega_n \mid u(x) = \varphi_i(x), \tau\varphi_i(x) + g(x, u(x)-) > \varepsilon\},$$

$$\Omega_\varepsilon^- = \{x \in \Omega_n \mid u(x) = \varphi_i(x), \tau\varphi_i(x) + g(x, u(x)) < -\varepsilon\}$$

имеет ненулевую меру. Пусть $\operatorname{mes}\Omega_\varepsilon^+ = \delta > 0$. Как показано выше, $u|_{\Omega_{2n}} \in W_q^{2m}(\Omega_{2n})$, поэтому существует $\eta > 0$ такое, что если $D \subset \Omega_{2n}$ измеримо и $\operatorname{mes} D < \eta$, то

$$\int_D |\tau u(x)|\, dx < \varepsilon\delta/8, \qquad \int_D |\psi(x)|\, dx < \varepsilon\delta/8,$$

ψ определяется формулой (8). Пусть G_1-замкнутое подмножество Ω_ε^+, а $G_2 \supset \Omega_\varepsilon^+$—открытое подмножество Ω_{2n} такие, что $\operatorname{mes} G_1 > \delta/2$ и $\operatorname{mes} G_2 \setminus G_1 < \eta$, функция $H \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\omega)$ на множестве G_1 равна единице, на $\omega \setminus G_2$ — нулю и $0 \leqslant H(x) \leqslant 1$ для любого $x \in \omega$. Тогда, поскольку носитель функции H содержится в $\Omega_{2n} \subset \omega_+$ и $\alpha = \inf_{\Omega_{2n}} u(x) \geqslant 1/2n$, функция $h_1(x) = \alpha H(x) \leqslant u(x)$ на ω и, следовательно, $h = -h_1$ удовлетворяет неравенству (6). Разделив обе части этого неравенства на α, получим $-p_u(H) - \int_\omega \lim_{t \to +0} g(x, u(x) + th(x)) H(x)\, dx \geqslant 0$, с другой стороны, в силу принадлежности $u|_{\Omega_{2n}}$ пространству $W_q^{2m}(\Omega_{2n})$ левая часть последнего неравенства равна

$$-\int_{G_2} \tau u H(x)\, dx - \int_{G_1} g(x, u(x)-)\, dx - \int_{G_2 \setminus G_1} \lim_{t \to +0} g(x, u(x) + th(x)) H(x)\, dx < 2\varepsilon\delta/8 -$$

$$- \int_{G_1} (\tau\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-))\, dx < 2\varepsilon\delta/8 - \varepsilon \operatorname{mes} G_1 < 2\varepsilon\delta/8 - \varepsilon\delta/2 < 0.$$

Получено противоречие. Случай, когда $\operatorname{mes}\Omega_\varepsilon^- \neq 0$, рассматривается аналогично (h_1 строится, исходя из Ω_ε^- вместо Ω_ε^+, и h берется равным h_1). Теорема доказана.

Теорема 4. *Если для функции g выполнено A1-условие по отношению к τ, то любое решение задачи* (1) *является полуправильным.*

Доказательство. Пусть u — ненулевое решение задачи (1), тогда для произвольного $h \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\omega)$ такого, что $h(x) \geqslant -u(x)$, имеем $p_u(h) + \int_\omega g(x, u(x)) h(x)\, dx \geqslant 0$, где $p_u(h)$ определяется формулой (5). Отсюда, как, и при доказательстве регулярности точек разрыва оператора T в теореме 3, следует $u|_{\omega_+} \in W_{\mathrm{loc},q}^{2m}(\omega_+)$, $\omega_+ = \{x \in \omega \mid u(x) > 0\}$, и для любой $h \in C^\infty(\omega)$ с носителем из ω_+ верно неравенство

$$\int_{\omega_+} (\tau u(x) + g(x, u(x))) h(x)\, dx \geqslant 0.$$

Откуда заключаем, что $\tau u(x) + g(x, u(x)) = 0$ почти всюду на ω_+. Если предположить, что u не является полуправильным решением задачи (1), то из AI-условия следует существование $i \in \Lambda$ такого, что $\operatorname{mes}\{x \in \omega_+ \mid (x, u(x)) \in S_i, \tau\varphi_i(x) + g(x, u(x)) \neq 0\} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 4.

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР.— 1976. **226**, № 3.— С. 506—509.
2. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями // Труды Всесоюз. конф. по уравнениям с част. производными, посвящен. 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— С. 346—347.
3. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения.— 1988.— **24**, № 8.— С. 1397—1402.
4. *Шрагин И. В.* Условия измеримости суперпозиций // Докл. АН СССР.— 1971.— **197**, № 2.— С. 295—298.

Получено 04.01.90