



ДО 100-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АКАДЕМІКА НАН УКРАЇНИ В. С. КОРОЛЮКА

„Асимптотичний аналіз — це не лише метод, це мистецтво
бачити просте в складному й майбутнє в обмеженнях”
(В. С. Корольок)

Дев'ятого серпня 2025 року виповнилося 100 років від дня народження академіка НАН України Володимира Семеновича Корольока (1925 – 2020) — фундатора сучасної української школи ймовірностей, творця методів асимптотичного аналізу стохастичних процесів та провідного дослідника в галузі математичної кібернетики. Його внесок у розвиток науки важко переоцінити: автор понад 300 наукових праць, в тому числі монографій, що стали класикою для кількох поколінь науковців. Завдяки його науковим досягненням було сформовано фундаментальні підходи до дослідження випадкових процесів, моделювання складних систем, а також застосування математичних методів у суміжних галузях — фізиці, біології, економіці.

Академік Корольок був не лише блискучим дослідником, а й талановитим педагогом, який виховав численні покоління науковців. Його учні стали провідними фахівцями в Україні та за її межами, продовжуючи справу вчителя.

Науковий шлях ученого був нерозривно пов'язаний з Інститутом математики НАН України, де він пропрацював більшу частину свого життя. В. С. Корольок активно сприяв розвитку математичної науки в незалежній Україні, очолюючи низку наукових і редакційних рад, а також репрезентуючи українську науку на міжнародній арені.

Біографічна довідка. В. С. Корольок народився 19 серпня 2025 року в Києві. У 1941 році закінчив середню школу з відмінним атестатом, за тиждень до початку війни, і в цьому ж році вступив до Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка.

У 1942 р. почав служити в армії, коли йому було 17 років. У 1947 році після демобілізації відновився на 3-му курсі фізико-математичного факультету Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка, який закінчив із відзнакою.

Уже в 1950-ті роки В. С. Корольок запропонував низку новаторських ідей у граничних теоремах, а згодом — в асимптотичному аналізі стохастичних процесів.

Наукову діяльність Володимир Семенович розпочав під керівництвом академіка Б. В. Гнеденка, одного з основоположників радянської школи теорії ймовірностей і кібернетики. У 1953 році захистив кандидатську дисертацію, а у 1960 році — докторську. З 1961 року почав працювати в Інституті математики АН УРСР (нині Інститут математики НАН України), з яким був пов'язаний до кінця свого життя. У 1969 році його було обрано членом-кореспондентом АН УРСР, а в 1978 році — дійсним членом (академіком).

Значний період життя В. С. Корольок мав статус “persona non grata” через репресованого у 1944 році батька, заарештованого і відправленого до сталінських таборів, де він і був страчений. Відтоді В. С. Корольок знаходився під підозрою влади весь час аж до „перебудови” з численними негласними обмеженнями, так що його обрання в члени Академії наук України було винятковою подією і відбулося лише завдяки підтримці видатних учених того часу.

Наукові здобутки. Наукова діяльність академіка Корольока охоплює широкий спектр питань теорії ймовірностей, зокрема:

- великі відхилення для випадкових еволюцій,
- асимптотичні методи в теорії випадкових процесів,
- теорію марковських та напівмарковських процесів і послідовностей,
- дифузійні наближення,
- теорію випадкових алгоритмів,
- методи стохастичного моделювання,
- теорію адресного програмування.

Математичні результати вченого опубліковані у понад 400 роботах, з них 30 монографій, більшість з яких перекладено іноземними мовами. Його праці суттєво вплинули на розвиток теорії ймовірностей, математичної кібернетики та теорії масового обслуговування.

Внесок в освіту та наукову школу. Одним із провідних напрямів діяльності В. С. Корольока була педагогічна й організаційна робота. Він багато років викладав у Київському державному університеті імені Т. Г. Шевченка та Національному технічному університеті України „КПІ”, підготував понад 30 кандидатів і докторів наук. Його учні успішно працюють в Україні, країнах Європи, США та Канаді.

Під його керівництвом в Інституті математики НАН України була створена і активно розвивалася школа з теорії ймовірностей і математичної статистики. Ця школа стала однією з провідних наукових шкіл у галузі стохастики на пострадянському просторі.

Ключові наукові напрями. Дослідження поведінки процесів у примежових зонах. Одним із важливих напрямів наукової діяльності В. С. Королюка стали дослідження явищ у примежових зонах — областях, де відбувається перехід між різними асимптотичними режимами. У таких ситуаціях класичні граничні теореми або методи апроксимації втрачають свою ефективність, що потребує розробки нових аналітичних підходів. Академік Королюк заклад методологічні основи аналізу стохастичних систем у збурених режимах, зокрема при переходах між станами або масштабами часу.

Під керівництвом В. С. Королюка його учнями та послідовниками було розроблено асимптотичні методи аналізу, які дозволили точно описати ймовірнісну структуру та поведінку процесів у тонких примежових шарах. Було побудовано моделі, що враховують дифузійні наближення при малому параметрі, який інтерпретується як характерна „товщина” примежової області. Значна увага приділялася також побудові функцій типу примежової зони для функціоналів випадкових блукань.

Отримані результати мали як теоретичну, так і прикладну цінність, зокрема, в теорії надійності складних систем, теорії масового обслуговування, при моделюванні випадкових еволюцій, а також у фізичних моделях переносу частинок. Праці В. С. Королюка у цій галузі стали основою для подальших досліджень його учнів і послідовників.

Випадкові блукання та граничні задачі. Одним із вагомих напрямів наукової діяльності В. С. Королюка були дослідження у галузі випадкових блукань і пов’язаних із ними граничних задач. Ці дослідження започаткували нову математичну парадигму у вивченні граничної поведінки стохастичних процесів у дискретному та неперервному часі, зокрема у контексті складних пуассонівських процесів.

У серії праць, зокрема в монографії [1], В. С. Королюк сформулював і обґрунтував класифікацію режимів граничної поведінки моментів першого перевищення встановленого рівня випадковим блуканням $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, де $\{X_i\}$ — незалежні, однаково розподілені випадкові величини. Визначальним параметром слугував середній зсув системи $\mu = \mathbb{E}[X_1]$:

при додатному середньому зсуві ($\mu > 0$) реалізується закон великих чисел;

при нульовому середньому зсуві ($\mu = 0$) нормалізовані часи перевищення збігаються до розподілу моменту перевищення для вінерівського процесу;

при від’ємному середньому зсуві ($\mu < 0$) має місце асимптотика з виродженим атомом у нулі та показниковим розподілом.

Ці результати не лише становлять глибоку теоретичну цінність, але й мають вагоме прикладне значення, зокрема, для моделювання нейрофізіологічних процесів, у теорії страхових ризиків, в теорії надійності та у фінансовій математиці.

Інноваційною у підходах ученого стала побудова резольвент і потенціалів для опису граничних функціоналів випадкових блукань, що забезпечило аналітичні методи розв’язання складних інтегральних та різницевих рівнянь, пов’язаних із задачами про відбивання, поглинання та проникнення через бар’єри.

Цей напрям досліджень продовжили і розвинули його учні та послідовники, сформувавши окрему галузь у межах української ймовірнісної школи.

Напівмарковські процеси та їх застосування. Особливе місце у науковій спадщині В. С. Королюка займають дослідження напівмарковських процесів (НМП) та їх застосувань у теорії випадкових еволюцій, страхових ризиків та масового обслуговування. На відміну від класичних марковських моделей, НМП описують системи з довільними законами розподілу

часу між змінами станів, що значно розширює можливості стохастичного моделювання реальних процесів.

Підхід В. С. Корольюка полягав у тому, щоб сформулювати моделі у вигляді процесів марковського відновлення, які допускають існування вкладених ланцюгів Маркова у розширених просторах станів, що, зокрема, було застосовано до моделей страхового ризику. В таких моделях суперпозиція процесів накопичення та втрат задається через процеси марковського відновлення, а сам процес ризику описується стохастичними співвідношеннями з індикаторними умовами.

Аналіз НМП вимагав розв'язування складних інтегральних рівнянь на півосі, які не мають явного розв'язку в загальному випадку, але піддаються ефективному асимптотичному аналізу методом сингулярного збурення. Зокрема, розроблено пуассонівську апроксимацію напівмарковських моделей, яка дозволяє моделювати явища рідкісних подій, як-от великі катастрофічні страхові виплати, що відбуваються за показниково розподіленими інтервалами часу.

Результати В. С. Корольюка у цій галузі мають високу прикладну значущість, зокрема, в актуарній математиці, економічному прогнозуванні, керуванні ризиками, а також у технічних системах обслуговування з напівмарковським надходженням або перемиканням.

Випадкові еволюції. Академік В. С. Корольок зробив піонерський внесок у становлення та розвиток теорії випадкових еволюцій — напрям, що досліджує стохастичні системи з динамікою, залежною від випадкових збурень у часі. Основною метою таких досліджень було формування ефективних математичних алгоритмів опису поведінки складних стохастичних систем на великих часових інтервалах.

В межах цього підходу В. С. Корольок сформулював метод асимптотичного аналізу стохастичних еволюцій на основі введення малого параметра $\varepsilon \rightarrow 0$, що дозволило перейти до розгляду граничних детермінованих систем. Було обґрунтовано ефект усереднення: стохастичні флуктуації на малих масштабах часу згладжуються, і система наближається до розв'язку детермінованого еволюційного рівняння.

Крім того, важливим напрямом стало дослідження флуктуацій навколо рівноважного стану. Для цього було введено нові схеми масштабування, що приводять до граничних процесів типу Орнштейна – Уленбека. Це дало змогу описати не лише середню поведінку системи, а й стохастичні відхилення від неї, тобто детально вивчити локальні коливання навколо точки рівноваги.

В. С. Корольок також розвинув теорію породжуючих операторів для опису стохастичної еволюції в банахових просторах тест-функцій, що суттєво збагачує аналітичний інструментарій для вивчення траєкторій стохастичних процесів.

Його фундаментальна монографія “*Stochastic systems in merging phase space*” (у співавторстві з N. Limnios) [4] стала фундаментальним виданням у цій галузі. У ній викладено алгоритми фазового укрупнення, дифузійної апроксимації, а також пуассонівської апроксимації для моделей з рідкісними подіями та напівмарковськими збуреннями.

Проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій. Упродовж останніх років своєї наукової діяльності Володимир Семенович активно працював над проблемою великих відхилень для випадкових еволюцій, зосередившись на складних моделях, де класичні методи вже не давали належних результатів. Його підхід став важливою віхою в сучасному аналізі ймовірнісних систем з ускладненою динамікою.

При розгляді випадкових еволюцій як процесів, що поєднують стохастичну та динамічну

(детерміновану) складову, змінюють свій стан з часом під впливом випадкових чинників і описуються за допомогою напівмарковських або марковських моделей із перемиканням динаміки, у контексті великих відхилень досліджувалась ймовірність того, що така система відхилиться на значну величину від свого типового (середнього) поведінкового сценарію.

В. С. Корольок запропонував нові схеми апроксимації випадкових еволюцій у межових режимах:

із асимптотично малим збуренням (наприклад, коли коефіцієнти випадкової складової прямують до нуля);

із швидким перемиканням станів;

для детерміновано керованих процесів, модифікованих випадковими механізмами.

Замість класичних лінійних породжуючих операторів марковських процесів він вводив та аналізував їх нелінійні аналоги, які виникали в результаті переходу до великовідхильної граничної задачі. Ці оператори описують швидке (експоненціальне) згасання ймовірності рідкісних подій і пов’язані з варіаційними задачами та гіпотетичною траєкторією „мінімальної енергії”. В результаті цього класичний підхід до великих відхилень (Крамер, Чернов, Фрейдлін – Вентцель, Дембо – Цайтуні) був переосмислений і розширений з урахуванням структурної складності систем, комбінованої випадково-детермінованої динаміки і неоднорідності у часі.

Схема дифузійної апроксимації процесів з локально незалежними приростами.

В. С. Корольок розробив узагальнену схему дифузійної апроксимації стохастичних процесів з локально незалежними приростами, яка охоплює широкий клас систем з дискретними стрибками, включаючи процеси типу народження-загибелі. У цій теорії основним об’єктом є породжуючий оператор, що описує лише стрибкову частину процесу, зокрема у випадку, коли можливі лише цілочислові зміни стану (наприклад, ± 1) [2].

Головна ідея полягає у побудові асимптотичного розкладу породжуючого оператора на тест-функціях із зсувом аргументу (типу $\varphi(u + v)$), що відображає локальну структуру змін у фазовому просторі $\mathbb{R}^d$. Це дозволяє виділити детерміновану компоненту — середній зсув процесу, та сформулювати відповідне еволюційне рівняння для граничного детермінованого процесу.

Отримана дифузійна апроксимація описує поведінку початкової стрибкової системи за допомогою неперервного гауссівського процесу, що наближається до розв’язання стохастичного диференціального рівняння типу Орнштейна – Уленбека. Це дозволяє не лише спростити моделювання, але й отримати ефективні оцінки характеристик флуктуацій, зокрема стаціонарного розподілу, дисперсії та швидкості повернення до точки рівноваги [4].

Особливе значення ця схема має для прикладних задач, зокрема, в економічних і технічних системах, де важливо відобразити локальні випадкові стрибки, але бажано працювати з неперервною моделлю.

Стійкість динамічних систем із марковськими перемиканнями. В. С. Корольок одним із перших сформулював і розробив математичну теорію стійкості динамічних систем зі стохастичними марковськими перемиканнями, що моделюють ситуації з швидкими випадковими збуреннями. У таких моделях динаміка системи залежить від випадкового процесу станів (марковського або напівмарковського), що керує перемиканням між різними режимами еволюції [4].

Основним підходом стало дослідження граничної поведінки системи при малому параметрі $\varepsilon \rightarrow 0$, що відповідає швидкому перемиканню. Було встановлено, що в таких умовах стохас-

тична система апроксимується усередненою детермінованою системою, яка описує середню динаміку за марковським процесом перемикавання. Було доведено, що якщо усереднена система є стійкою, то за певних умов стійкою буде й початкова стохастична система, зокрема її флуктуації мають гауссівський характер і описуються дифузійним процесом типу Орнштейна – Уленбека [5].

Ключовим результатом стало обґрунтування того, що граничний процес флуктуацій має стаціонарний нормальний розподіл, і його поведінка повністю визначається трьома числовими характеристиками: середнім зсувом, дисперсією та коефіцієнтом зворотного зв'язку, які обчислюються за генераторами системи та марковського процесу перемикавань [6].

Схема фазового укрупнення. Крім того, В. С. Корольок розробив схему фазового укрупнення перемикаючих систем, яка дозволяє перейти до ефективних моделей в умовах складних флуктуацій та сингулярних збурень генератора процесу [4] (рис. 1).

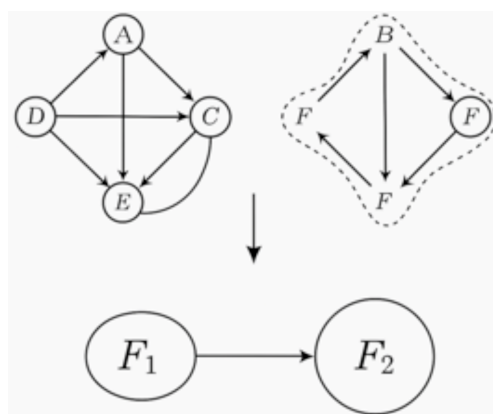


Рис. 1. Схема фазового укрупнення.

Цей метод широко застосовувався Володимиром Семеновичем у теорії випадкових процесів для спрощення складних стохастичних систем, зокрема марковських процесів. Суть полягає у згортанні (агрегації) деяких станів у „фази”, що дозволяє отримати нову, простішу модель з меншою кількістю станів, зберігши при цьому ключові характеристики процесу.

Основна ідея фазового укрупнення полягає у наступному.

Вихідна ситуація. Маємо складну марковську модель з великою кількістю станів. Частина з них утворює *фази* — підмножини станів, у яких перебування триває довго або відбувається інтенсивне внутрішнє перемішування.

Кроки укрупнення:

1. Поділ множини станів на фази: $S = \bigcup_i F_i$, де F_i — фази.
2. Усереднення поведінки всередині кожної фази: замість моделювання детального переходу між станами всередині F_i враховується лише середній час перебування та ймовірності переходу між фазами.
3. Побудова укрупненого процесу, в якому станами є фази, а ймовірності переходу — це результат усереднення оригінальної динаміки.

Математична спадщина: методи і формули. **Теорема Корольока в системах масового обслуговування.** У монографії А. Я. Хінчина (1955 р.) вперше було вміщено результат, який отримав назву „теорема Корольока”. Вона встановлює рівність між двома визначеннями ін-

тенсивності стаціонарного потоку:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[T]},$$

де λ — інтенсивність, а $\mathbb{E}[T]$ — математичне сподівання часу між подіями. Цей результат має фундаментальне значення для аналізу відновлюваних процесів [7].

Напівмарковські процеси та їх застосування. Поняття напівмарковських процесів було вперше введене В. С. Королюком у середині 1950-х років. Уперше ідеї, пов’язані з узагальненням марковських процесів, у яких час перебування у станах не обов’язково підпорядковується експоненціальному закону, були сформульовані ним у кандидатській дисертації (1953 р.). Формалізовано й систематично цю теорію було викладено у низці його публікацій наприкінці 1950-х – на початку 1960-х років. Згодом він опублікував фундаментальну монографію „Полумарковские процессы” (спільно з А. Ф. Турбіним, 1975 р.), яка стала класичною працею в цій галузі.

Він увів три ключові характеристики напівмарковських процесів, які покладено в основу їх математичного опису:

1. Ядро напівмарковського процесу (semi-Markov kernel)

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i).$$

Це ймовірність того, що наступний стан буде j і час перебування у стані i не перевищить t . Ядро $Q_{ij}(t)$ задає загальну поведінку напівмарковського процесу.

2. Функцію залишкового часу (survival function або sojourn time distribution)

$$F_i(t) = \sum_j Q_{ij}(t), \quad \bar{F}_i(t) = 1 - F_i(t),$$

де $F_i(t)$ — розподіл часу перебування у стані i , $\bar{F}_i(t)$ — ймовірність залишитися у стані i більше ніж t одиниць часу.

3. Рівняння Колмогорова для ймовірностей перебування

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} \bar{F}_i(t) + \sum_k \int_0^t q_{ik}(\tau) P_{kj}(t - \tau) d\tau,$$

де $P_{ij}(t)$ — ймовірність того, що процес знаходиться у стані j в момент часу t , починаючи з i у час 0; $q_{ik}(t) = \frac{d}{dt} Q_{ik}(t)$ — щільність ядра переходів.

Це аналог інтегрального рівняння Колмогорова для напівмарковського процесу, яке враховує розподіли часу перебування у станах.

Наведені формули утворюють основу аналітичного апарату напівмарковських процесів і використовуються у моделюванні складних систем — від теорії надійності до біостатистики та фінансів.

Приклад: теорія масового обслуговування. В. С. Королюк застосовував напівмарковські

моделі для опису роботи систем обслуговування, у яких клієнти прибувають не за пуассонівським законом, часи обслуговування довільні і між подіями існує залежність. Такі системи не можна адекватно описати марковськими процесами, і саме тут напівмарковські процеси, введені та формалізовані Королюком, виявилися вирішальними.

Метод траєкторій. В. С. Королюк розвинув метод дослідження випадкових процесів через функції на траєкторіях. Зокрема, для марковського процесу $v(t)$ з локальними інтенсивностями $a^\pm(u)$ аналіз проводиться через породжуючий оператор $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\varphi(u) = a^+(u)[\varphi(u+1) - \varphi(u)] + a^-(u)[\varphi(u-1) - \varphi(u)],$$

де $\varphi(u)$ — гладка тест-функція [3].

Цей метод полягає в дослідженні поведінки типових траєкторій стохастичного процесу при малому параметрі $\varepsilon \rightarrow 0$, який зазвичай відповідає швидкому масштабуванню часу або зменшенню інтенсивності збурень.

Метод траєкторій передбачає наступні кроки:

1. Розклад стохастичного процесу на детерміновану й випадкову частину

$$X^\varepsilon(t) = x(t) + \eta^\varepsilon(t),$$

де $X^\varepsilon(t)$ — процес із швидкозмінною динамікою (залежний від малого параметра), $x(t)$ — границя середніх траєкторій (детермінована складова) і $\eta^\varepsilon(t)$ — флуктуаційна частина, яка характеризує випадкові відхилення.

Цей розклад дозволяє перейти до асимптотичного аналізу, де $x(t)$ є розв'язком детермінованої системи, а $\eta^\varepsilon(t)$ збігається до гауссівського процесу.

2. Диференціальне рівняння для детермінованої траєкторії

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — детермінована траєкторія, $f(x)$ — векторне поле (середній дрейф процесу) і x_0 — початкове значення, що збігається з початковим станом стохастичного процесу.

Така траєкторія є основою побудови методу траєкторій — ми порівнюємо стохастичний процес із цією детермінованою „опорною” траєкторією.

Типові приклади функції $f(x)$:

у моделі логістичного зростання: $f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$,

у моделі обслуговування (черги): $f(x) = \lambda - \mu x$,

у дифузійних апроксимаціях: $f(x)$ — дрейф процесу.

3. Стохастичне диференціальне рівняння (СДР) для флуктуаційної складової

$$d\eta(t) = A(t)\eta(t)dt + B(t)dW(t), \quad \eta(0) = 0.$$

Це класичне СДР типу Орнштейна – Уленбека: гранична поведінка флуктуацій навколо детермінованої траєкторії. Опис компонентів цього рівняння:

$\eta(t)$ — випадкова (флуктуаційна) частина розкладу стохастичного процесу, яка відображає відхилення від детермінованої траєкторії $x(t)$,

$A(t)$ — матриця похідних дрейфу:

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x(t)},$$

тобто лінеаризація правої частини детермінованої системи поблизу траєкторії $x(t)$,

$B(t)$ — матриця коефіцієнтів розсіювання (дисперсійна структура),

$W(t)$ — стандартний вінерівський (броунівський) процес,

$\eta(0) = 0$ — початкове відхилення від траєкторії відсутнє.

Це СДР описує динаміку відхилень стохастичного процесу в околі основної траєкторії $x(t)$. Саме з таких рівнянь В. С. Королюк виводив оцінки ймовірностей траєкторій, граничні розподіли та функціональні граничні теореми.

Метод траєкторій дозволяє:

побудувати асимптотичну модель у вигляді СДР;

розділити стохастичний аналіз на макрорівень (детермінований) і мікрорівень (флуктуаційний);

ефективно застосовувати його в задачах навантажених систем масового обслуговування, систем з випадковими збуреннями, біофізичних процесів.

Асимптотичний аналіз. Теорія слабкої збіжності стохастичних систем до процесів типу Орнштейна – Уленбека є одним із визначальних напрямів наукової діяльності Володимира Семеновича. Він заклав основи методів, що дозволяють переходити від складних дискретних або напівмарковських моделей до диференціальних рівнянь стохастичного типу в дифузійному масштабі.

Нижче наведено три ключові формули, які відображають ідеї В. С. Королюка щодо такого переходу:

1. Масштабування системи: фазове прискорення часу та масштаб варіацій

$$X^\varepsilon(t) = \frac{X(t/\varepsilon) - a(t/\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Це нормалізоване відхилення від детермінованої траєкторії $a(t)$, що враховує вплив флуктуацій у масштабі $\sqrt{\varepsilon}$. Такий підхід дозволяє вивчати флуктуації навколо середнього у швидкозмінній системі. Це перший крок до виведення граничного стохастичного процесу.

2. Гранична збіжність до процесу Орнштейна – Уленбека.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ процес $X^\varepsilon(t)$ збігається за розподілом до $\xi(t)$, що задовольняє СДР

$$d\xi(t) = -A\xi(t)dt + B dW(t),$$

де A — стабілізуючий оператор або матриця (часто похідна детермінованої частини), B — оператор або матриця коефіцієнта дифузії (визначає інтенсивність шуму), $W(t)$ — вінерів-

ський процес (білий шум).

Це класичне рівняння процесу Орнштейна – Уленбека. У працях В. С. Корольока воно є граничним режимом стохастичних систем із швидким марковським або напівмарковським середовищем.

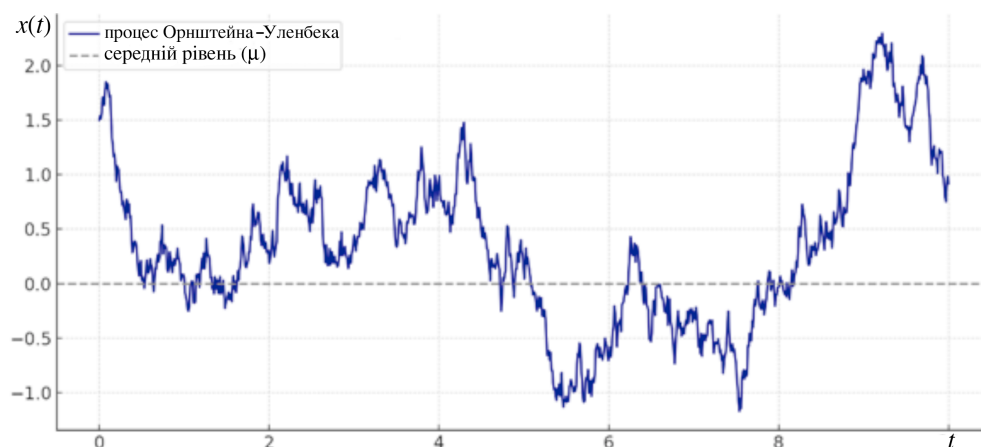


Рис. 2. Слабка збіжність до процесу Орнштейна – Уленбека.

На рис. 2 показано, як флуктуації навколо середнього значення ($\mu = 0$) змінюються за законом процесу Орнштейна – Уленбека: траєкторія завжди прагне повернутись до рівноваги, хоч і під впливом випадкових збурень. Це відображає поведінку складної стохастичної системи у граничному режимі саме так, як це описував В. С. Корольок у своїй теорії.

3. Критерій слабкої збіжності у просторі Скорохода

$$X^\varepsilon(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi(\cdot) \quad \text{в} \quad D[0, T].$$

Слабка (у сенсі розподілів) збіжність нормалізованих процесів X^ε до граничного процесу ξ відбувається у просторі неперервних у правій частині функцій з лівими границями (Càdlàg), що забезпечує узагальнення до дискретно-континуальних систем. У монографіях В. С. Корольока такі критерії формалізовано через мартингальні методи та метод обмежувальних мір. Основними ідеями доведення такої збіжності є:

1. Представлення процесу у вигляді мартингалу + залишку

$$X^\varepsilon(t) = M^\varepsilon(t) + R^\varepsilon(t),$$

де $M^\varepsilon(t)$ — локально обмежений мартингал, $R^\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (залишковий член).

Ідея полягає в тому, щоб відокремити „стохастичну складову” у вигляді мартингалу і контролювати „залишок”, що зникає в асимптотиці. Це дозволяє довести збіжність через властивості мартингалів.

2. Критерій збіжності за допомогою квадратичної варіації

$$\langle M^\varepsilon \rangle(t) \rightarrow \langle M \rangle(t) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $\langle M^\varepsilon \rangle(t)$ — квадратична варіація мартингалу M^ε , $M(t)$ — граничний гауссівський мартингал (часто вінерівський процес).

Ключовий крок у доведенні функціональної слабкої збіжності: якщо квадратична варіація збігається, то і сам процес збігається (згідно з теоремою Ревуза – Йора або аналогами).

3. Метод обмежувальних мір (tightness + збіжність скінченновимірних).

Потрібно довести:

а) обмеженість мір (tightness):

$$\sup_{\varepsilon} \left(\mathbb{P} \sup_{t \leq T} |X^\varepsilon(t)| > C \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad C \rightarrow \infty,$$

б) збіжність скінченновимірних розподілів:

$$X^\varepsilon(t_1), \dots, X^\varepsilon(t_k) \xrightarrow{\mathcal{D}} X(t_1), \dots, X(t_k).$$

Ці дві умови забезпечують збіжність процесів у просторі Скорохода $D[0, T]$. Це фундамент методу обмежувальних мір, що був активно використаний В. С. Королюком у поєднанні з мартингальними оцінками.

Пуассонівська апроксимація в науковій спадщині В. С. Королюка. Пуассонівська апроксимація посідає важливе місце в науковій спадщині В. С. Королюка. Це один із ключових напрямів його досліджень у теорії ймовірностей, зокрема в області граничних теорем для дискретних випадкових процесів.

Пуассонівська апроксимація — це підхід, який полягає в наближенні розподілу кількості рідкісних подій розподілом Пуассона. Така апроксимація ефективна, коли йдеться про незалежні події з малими ймовірностями.

В. С. Королук зробив вагомий внесок у розвиток та уточнення умов, за яких пуассонівська апроксимація є коректною. Його результати характеризуються високою точністю оцінок швидкості збіжності, а також розробкою нових методів апроксимації в задачах із залежностями між подіями. Наведемо основні здобутки у цій сфері.

1. Узагальнення класичних результатів. В. С. Королук здійснив істотне узагальнення класичних результатів пуассонівської апроксимації, поширивши її застосування на випадки залежних випадкових величин та скінченних схем випробувань, де традиційне припущення про незалежність не виконується. У працях [1 – 3] він розробив нові підходи до встановлення умов збіжності розподілу кількості рідкісних подій до пуассонівського закону. Зокрема, запропонував точні умови асимптотичної незалежності та оцінки точності апроксимації у варіаційній метриці й метриці Колмогорова. Ці результати мають фундаментальне значення для теорії граничних теорем і відкривають широкі можливості застосування пуассонівських моделей у задачах із складною залежною структурою, зокрема в системах із післядією, телекомунікаційних мережах та біостатистичних дослідженнях.

2. Оцінки точності. У низці праць В. С. Королук отримав якісні та кількісні оцінки точності пуассонівської апроксимації, зокрема в метриці Колмогорова та в метриці загальної варіації [1, 2, 4]. Було досліджено точкові (локальні) та інтегральні відстані між розподілом кількості рідкісних подій у дискретних схемах та відповідним пуассонівським законом. Запропоновані оцінки мають асимптотично точний характер і застосовуються в теорії випадкових

полів, у моделюванні складних систем обслуговування та в теорії надійності. Ці результати становлять основу для аналізу збіжності дискретних стохастичних структур до пуассонівських процесів та дозволяють обґрунтовувати застосування наближених моделей у практичних задачах.

3. Практичні застосування. Значне місце в науковій діяльності В. С. Королюка посідають дослідження, пов'язані із застосуванням пуассонівських апроксимацій у прикладних задачах. Розроблені ним підходи виявилися особливо ефективними для моделювання рідкісних подій у таких галузях, як теорія масового обслуговування, телекомунікаційні системи, надійність складних технічних систем, біостатистика, а також статистичний контроль якості [1 – 4]. У цих роботах він, зокрема, обґрунтував використання пуассонівського наближення для оцінки кількості збоїв у системах з великим числом компонент, для аналізу вхідних потоків у мережах зв'язку, а також для моделювання випадкових точкових процесів у просторово-часових системах.

Особливістю підходу Королюка було поєднання глибокої теорії з реальними практичними моделями, що дозволило будувати апроксимативні стохастичні моделі з контролем точності. Багато з цих результатів були реалізовані у вигляді алгоритмічних процедур і стали основою чисельного моделювання стохастичних структур з рідкісними подіями.

Учні та школа. Під керівництвом академіка сформувалася потужна наукова школа. Його учні — відомі дослідники в Україні, Франції, Японії та США. Зокрема, Я. М. Чабанюк, І. В. Самойленко, Д. В. Королюк, М. С. Братійчук, Д. В. Гусак, І. В. Юрченко та інші продовжують справу в області дифузійного аналізу та процесів із перемиканням.

Наукова та організаційна діяльність. В. С. Королюк був головним редактором журналу „Теорія ймовірностей та математична статистика” та членом редколегій журналів „Теория вероятностей и ее применения”, „Кибернетика и системный анализ”, „Український математичний журнал”, “Theory of stochastic processes, applied stochastic models and data analysis”, активним організатором міжнародних конференцій з прикладної математики. Його публікації стали основою розділів у міжнародних збірниках, виданих Springer, Elsevier та WSP.

Володимир Семенович Королюк — це постать, яка уособлює силу української математичної традиції. Його спадщина — це не лише численні теореми, а й культура наукового мислення, що формує майбутнє. Творчість Володимира Семеновича — це ціла епоха в розвитку ймовірнісних методів, теорії випадкових процесів та математичної кібернетики. Але справжній масштаб його спадщини вимірюється не лише кількістю цитувань чи учнів, а й впливом на сам спосіб мислення в науці. Його ідеї і досі живуть у сучасних дослідженнях, проникаючи в нові сфери науки. Завершуючи цей огляд, можна зазначити: спадщина академіка Королюка жива, і вона ще довго буде розвиватись у працях тих, хто вчився на його прикладі.

Література

1. В. С. Королюк, *Граничні теореми для складних пуассонівських процесів*, Наукова думка, Київ (1975).
2. V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk, *Stochastic models of systems*, Springer (1989).
3. V. S. Korolyuk, A. F. Turbin, *Mathematical foundations of the state lumping of large systems*, Springer (1993).
4. V. S. Korolyuk, N. Limnios, *Stochastic systems in merging phase space*, 1st ed., World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2005); DOI: 10.1142/5979.
5. V. S. Korolyuk, *Average and stability of dynamical systems with rapid stochastic switchings*, Exploring Stochastic Laws, De Gruyter (1995), p. 219 – 232.

6. V. S. Korolyuk, *Stability of an autonomous dynamic system with fast markov switching*, Ukr. Math. J., **43**, № 9, 1101 – 1105 (1991).
7. V. S. Korolyuk, *Superposition of Markov renewal processes*, Cybern. and Systems Anal., **17**, 556 – 560 (1981).
8. В. С. Корольюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова думка, Киев (1976).
9. V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskich, *Theory of U-statistics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).
10. V. S. Korolyuk, V. M. Shurenkov, *Approximation of rare events in semi-Markov processes*, Theory Probab. and Math. Statist., **26**, 83–95 (1982).
11. V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskich, *Poisson approximation in reliability models*, Mathematical Methods in Reliability Theory, Springer (1995).

Редакційна колегія „Українського математичного журналу”